世の人々へ

— ある『負け組科学者』の学習ノート —

著：江澤潔 [*1]
(初版：2021/03/27; 改定（修正）：2021/04/01)

[*1] 元科学研究者 (ORCID: 0000-0003-4906-8578); 宛先: 〒368-0051 秩父市中村町 3-1-33 ; Tel & Fax: 0494-22-5501 .

はじめに

江澤　潔　[手書き：2020/12/11-12; 電子文書化（by UY）: 2021/01/23-30]

数学や物理学 (あるいは他の理科の科目) を学習する際の私のモットーは、

「公式/定理は丸暗記せず、その導出法/証明法を 理解して覚えよ!!」

である。そうする事のメリットはいくつかある。 まず、(受験勉強等で)実用的なメリットとしては、

（１）　導出法/証明法の筋道だけ覚えておけば、あとの枝葉末節は (大抵) 自然と補っていけ、関連した 公式/定理は イモづる式に導出/証明できるので、結果的に、少ない頭の記憶容量で、より多くの公式/定理が覚えられる。

（２）　丸暗記だと、どうしても (例えば係数が $+$ か $-$ か? 2 がついたか? π (円周率) がついたか?) 等の子細があやふやになりがちだが、自分で導出すれば、そういった子細 を間違えるリスクは劇的に減る。

等が挙げられる。実際、私は高校に入ってから記憶力がだいぶ悪化しつつあったが、このおかげで、無事、大阪大学理学部物理学科に現役で合格できた。しかしながら、公式/定理の導出法/証明法を理解して覚えることのメリットは、実はもっと深遠(しんえん:はかりしれないほど奥深いさま)なものなのである。

（３）　公式/定理を丸暗記するだけだと、どうしても、明らかにそれが応用可能な問題にしか応用できない。一方、その導出法/証明法を理解して覚えておけば、様々な場面の 似た様な状況において、その方法を少し変形や拡張するだけで、適用できたり、ある いは複数の方法を正しく組み合わせて、新たな (正しい) 公式/定理を生み出すこと ができる様になり、可能性は無限に拡がるのである。

実際、私が (中学・高校でもその萌芽はみられたもののそれを除いたとしても) 大学に入学以降、生み出した新たな公式/定理は (論文等に記載しなかった細々としたものも含めると) ひょっとしたら、授業や講義や文献等で学んだものよりも数が多いかも知れない。そして、そのおかげもあって、私は 1991 年に阪大大学院に入学してから、約 8 年間で 15 本の学術論文 (うち 10 本は単著) を審査つき国際学術雑誌に発表し、また、その後移った生物系の分野 (進化遺伝学) でも、実験が全く出来ず、また、コンピュータの扱いも苦手で

ありながらも、11 本の学術論文 (うち 3 本は単著) を審査つき国際学術雑誌に発表出来、更に最後の研究プロジェクトに関する 3 つの論文 (LASTPIECE、ANEX、 SRDMap) を書き上げることができた。(注:最後の 3 つの論文は、「敵方」の「妨害工 作」があるのを予想したため、学術雑誌には投稿せず、代りに、オープン・ソース (CC 4.0) として公開している。)[*2]

導出法/証明法 を理解して覚える事は、いわば、私が私たるゆえんなのである。

更に、教育上のメリットとしては、

（4） 公式/定理の導出/証明は、厳然とした論理的な道筋に沿って行われるので、それら を理解する事は、論理的思考のよい鍛錬となる。

ということが挙げられる。

実際問題として、小、中、高で習う公式/定理のほとんどは、(学校の定期テストや受験以外の) 実生活では役に立たない、と考えている人々は、大人も子供も含めて、多いのではなかろうか?[*3] だとすると、一体我々は何のために 公式/定理を習う/学ぶのか?

「受験戦争に勝ち残る (そして、「明るい人生」への切符をつかむ) 為」

と言ってしまうと身も蓋もないが、本当にそれだけなのだろうか?

> 私が思うに、学校で 公式/定理 を 学ぶ/習う **真の意義**は、
>
> その証明法や導出法を学び、理解することにより、**論理的な思考力**を鍛えて磨く事、
>
> にあるのではないかと思うのである。

何故なら、たとえ 公式/定理 そのものは実生活で役に立たないとしても、その導出/ 証明の学習によって鍛えられた論理的思考力は、その後、大人になってからも活きてくる ハズだからである。[もちろん、その為にはまじめに課題に取り組まなければならないのは言うまでもな い。]

---

*2 これらの論文のリストは私の ORCID 登録簿 (Kiyoshi Ezawa で検索) でも見られる し、又、パブリック・ドメインで公開している「ある『負け組科学者』の人生の記録」の 補遺でも見ることができる。

*3 実際には目に見えない所で意外と役に立っているのだが、それは (技師や学者などの) 「他の誰か」がひそかに用いているのであり、一般庶民が自ら直接 公式/定理を利用する場面にはそうそう出くわさないであろう。

そんな訳で「私の私たる所以」である「公式/定理 の 導出/証明」を「体感」して頂くことで、読者の皆さんにも、受験テクニックに囚われない、数学や物理へのいつもと違った視点、アプローチを味わってもらい、その新たな魅力を感じてもらえたら、と思い筆を執った次第である。

私が実際の研究現場でそれをどう実践して来たかを知ってもらう為には、私の書いた学術論文を読んで頂くのがいちばん手っ取り早いとは思うのだが、論文を読むにはそれなりの専門知識 (および英語読解力) が必要であり、一般の人々には少し敷居が高いかもしれない。

そこで、ここでは、多くの人々になじみが深いと思われる、中学、高校 (および大学の 1〜3 年くらい) で習う (ハズの) 数学や理科の公式/定理のうちでも基本的で代表的なものに関して、 その導出法/証明法を記述して、私のモットーを「実演」してみた。

できる限り、最も基本的なものからそれらを応用したものへと 論理が流れるような順番 で配置したつもりである。

導出法/証明法のほとんどは、教科書や参考書等でよく見られる典型的なものであるハズ だが、幾つかかは私自身が考案したかなりユニークな方法のつもりである。[しかしながら、それも実際には既に誰かが考えついて発表しているものかも知れない。その場合、今、それを調べられない状況なので、適切にクレジットできない事を予め謝罪する。] (基本的に、私は問題に直面したら、その解決法を(インターネットなど調べずに)まず 自分で考える人間なのだ。)

これを読んで、皆さんが、公式/定理の導出法/証明法を理解し、憶える事のメリットや魅力を感じて頂けたら、大変嬉しいし、又、ここに挙げてある導出法/証明法自体の幾つかを面白いと感じ、実際に学校や塾/予備校等で教材として活用して頂けたら幸甚である。

末筆ながら、この手記の執筆にご協力下さった私の家族、とりわけ手記の一部をタイプしてくれた我が姉康子（現姓内田)、および埼玉医科大学病院精神科の医師、看護師その他の皆様方に心よりお礼申し上げる。

2020/12/11（金） 江澤　潔

[注] この手記すべてを読んで理解するのに必要な知識は、中学および高校レベルの数学の基礎知識、および、偏微分（例、 $\frac{\partial}{\partial x}A(x,y)$)、多重積分（例、$\int dx \int dy\ A(x,\ y)$)、そして、ベクトル積 (例、$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_z)$）に関

する基礎知識である。しかしながら、中学レベルの数学の基礎知識さえあれば解ける問題も数多くあるので、どうかご安心になって、読み進めて頂きたい。

目次

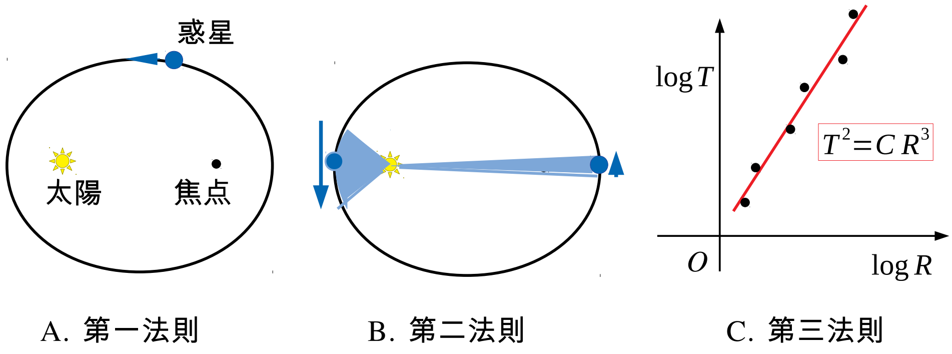


図 1　ケプラーの三法則。**A.** 第一法則。**B.** 第二法則。**C.** 第三法則。

1　ケプラーの第３法則とニュートンの万有引力の法則

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/16-17 & 03/14]

日本にいる多くの方々は、中学もしくは高校の理科で、ケプラー（Kepler）の 3 法則なるものを習ったハズである。簡単におさらいすると、それは太陽系の惑星の運行に関する以下の様な法則であった（図 1）。

第一法則　各々の惑星は太陽をその焦点の一つとした楕円の上を運行する（図 1 A)。

第二法則　各々の惑星と太陽が結ぶ線分が一定時間内に掃く面積は常に一定である（面積速度一定の法則）（図 1 B)。

第三法則　太陽系の各々の惑星と太陽の間の平均距離（R）とその太陽周りの周期（T）の間には、次の関係が成立する：$T^2 \propto R^3$（即ち、$T^2 = C \times R^3$、ここで C はすべての惑星に共通の係数）（図 1 C)。

第一法則は、かの有名なコペルニクス（Copernucus）が提唱した地動説（惑星は太陽を中心とした円運動をする）のさらに精度を上げた修正版と解釈できる。また、第二法則は、物理学で言うところの角運動量保存則に相当する。（このことから、太陽と惑星の間にはその 2 つを結んだ直線の方向の力しか働かない事が示唆される。）

問題は第三法則である。少なくとも私が学生の頃には、この法則はポンと与えられただけで、その意味（あるいは意義）等については説明が全くされず、不可解な思いをした。しかしながら、よく考えると、実はこの第三法則は ニュートン（Newton）の万有引力の法則と 同様（あるいは同等？）の 内容を含んでいる ことがわかるのである。

それを示すために、問題を少し単純化して、太陽の周りを**等速円運動** する（仮想的な）

天体を考える。（円軌道の半径を R、円運動の周期を T とする。）

この天体にかかる向心力（天体が外に飛ばされない様に中心（つまり太陽）の方向に引っ張る力）は、加速度が $a_{向心} = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ なので[*4]、この天体の質量を m とすると、ニュートンの運動方程式より、向心力 $F_{向心}$ は、

$$F_{向心} = m \times a_{向心} = m\ R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

となる。ここに上述のケプラーの第三法則、$T^2 = C \times R^3$、を適用すると、

$$F_{向心} = (2\pi)^2\ m \times \frac{R}{T^2} = (2\pi)^2\ m \times \frac{R}{CR^3} = \frac{(2\pi)^2}{C} \times \frac{m}{R^2} \qquad 、 \tag{1}$$

即ち、

この（仮想）天体は、太陽により、天体の質量（m）に比例し、
距離（R）の二乗に 逆比例する 力で引っ張られている

ことがわかる！！

これに更にニュートンの作用・反作用の法則を適用し、同様に惑星も太陽を同じ大きさの力で引っ張っている事に気づくと、その力は太陽の質量（$M_\odot$ で表す）にも比例するハズなので、式（1）は以下の様に書き換えられる：

$$F_{向心} = G\ \frac{M_\odot\ m}{R^2} \tag{2}$$

（ここで、$G\ M_\odot \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2\pi)^2}{C}$ と置いた）。これはまさしく、**ニュートンの万有引力の法則**に他ならない！！

ここで示した様に、ケプラーの第三法則とニュートンの万有引力の法則とは密接な関係にある（というか、ほぼ等価である）という事実を、（最近はどうだか分からないが、）少なくとも私の世代以上の人間はあまり知らないだろう。ニュートンがどうやって、万有引力の法則（式（2））にたどり着いたのかは私はよく知らないが、ケプラーはニュートンよりほんの少し昔の人なので、ニュートンがこの様な思考ルートを辿った可能性は非常に大きい。[しかしながら、万有引力の法則（式（2））からケプラーの第一法則、即ち、惑星の楕円軌道が導ける[*5] ので、別の思考ルートをたどった可能性もゼロではないが、、、。]

[*4] この事実は 補遺 A で証明する。

[*5] 惑星軌道の（太陽を座標の原点とした）極座標表示と、（惑星運動の）エネルギー保存則および角運動量保存則を用いると、比較的簡単に導ける。興味ある方は挑戦されたし！（同様にして、ケプラーの第三法則も、楕円軌道でも厳密に導けたような気がするが、記憶があやふやなので定かではない。）

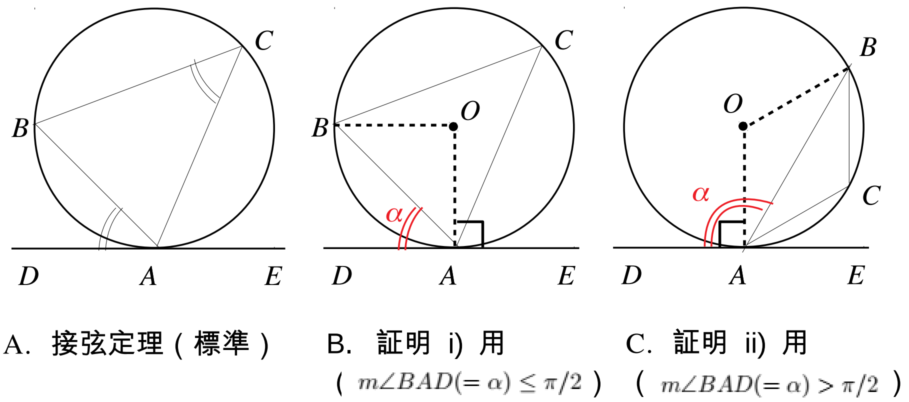


図 2　**接弦定理。A.** 標準形。**B.** i)（$m\angle BAD(=\alpha) \leq \pi/2$）の証明用。**C.** ii)（$m\angle BAD(=\alpha) > \pi/2$）の証明用。

私が思うに、学校では、ただ知識の羅列だけでなく、この様な知識（あるいは科学的事実）同士の有機的な結びつきや２つ以上の知識を適切に組み合わせると新たな事実が得られる事、また、新たな知識の信ぴょう性を既知の知識から判断する事、等ももっと積極的に教えるべきではないだろうか。

いずれにせよ、現代はインターネットの普及および発展により、知識自体は用意に得られるようになった。その為、これからは、覚えている知識の量自体はあまり重要でなくなってくる。それよりも、各々の主題の根幹を成す**「コアな知識」**の有機的な体系を頭に入れて、それを参考にして、インターネット等から得られた知識の真偽をできるだけ正しく判断し、また、（日常生活あるいは仕事で）自らが直面している課題・問題の解決のために有効に利用できる力が求められる様になる、と私は思う。

その為には、上記の様な、知識同士の有機的な関係を示すことを「例題」や「演習」として（生徒たちに）できるだけ多く経験させる事が必要となって来よう。

2　接弦定理の証明法

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/17-19]

中学２～３年の時、**接弦定理** なるものを習った記憶がある。

定理 2.1（接弦定理）　円（図２A）のある弦 $\overline{AB}$ と、その一端で接する円の接線（今の場合 $\overline{DAE}$）が成す角（今の場合 $\angle BAD$）の大きさは、その弦によって張られる円周角

（今の場合 $\angle BCA$）の大きさに等しい。即ち、[*6]

$$m\angle BAD = m\angle BCA$$

だが、授業時間が足りなかったせいかどうか知らないが、その証明法は習わなかった記憶がある。（あるいは習ったことをただ忘れているだけなのかも知れないが、、、。）

どうも気になるので証明法を考案して見た。どうやら、円の中心点（O と記す）と、そこからの半径、$\overline{OA}$ および $\overline{OB}$、を補助線として書き加えれば OK な様である。2 つの場合に分けて考える。

（以下、表記を簡略化するため、$m\angle BAD \ = \ \alpha$ と置く。）

i) $m\angle BAD(= \alpha) \leq \pi/2 \ (= 90^\circ)$ の場合（図 2 B）

先ず、接線は半径と直交する[*7] ので、$m\angle OAD = \pi/2$ 。よって、

$$m\angle OAB = m\angle OAD - m\angle BAD = (\pi/2) - \alpha$$

次に、$\triangle OAB$ は、$OA = OB$ の二等辺三角形なので、

$$m\angle OBA = m\angle OAB = (\pi/2) - \alpha$$

これらより、

$$m\angle BOA = \pi - (m\angle OAB + m\angle OBA) = \pi - 2 \times ((\pi/2) - \alpha) = 2\alpha$$

最後に、中心角と円周角の間の関係[*8] を用いて、

$$m\angle BCA = (m\angle BOA)/2 = (2\alpha)/2 = \alpha$$

よって、

$$m\angle BCA = m\angle BAD(= \alpha)$$

[証明（前半）終わり]

[*6] これ以降、ある特定の角の大きさ（角度）を $m\{$ 特定の角 $\}$ で表すこととする。例えば、$\angle ABC$ の大きさは、$m\angle ABC$ で表される。また、ある特定の線分の長さを、上線を除いて表すこととする。例えば、$\overline{AB}$ の長さ（つまり、点 A と点 B の間の距離）は、単に AB で表される。

[*7] この事実は 補遺 B で証明する。

[*8] これは 補遺 C で導出される。

ii) $m\angle BAD(=\alpha) > \pi/2$ (= 90°) の場合（図 2 C）

この場合、二等辺三角形 $\triangle OAB$ の等角は、

$$m\angle OAB = m\angle OBA = \alpha - (\pi/2)$$

よって、

$$m\angle BOA\,(\text{小さい方}) = \pi - 2 \times (\alpha - (\pi/2)) = 2\pi - 2\alpha$$

これより、問題の中心角は、

$$m\angle BOA\,(\text{大きい方}) = 2\pi - m\angle BOA\,(\text{小さい方}) = 2\pi - (2\pi - 2\alpha) = 2\alpha$$

証明（前半）と同様に、円周角と中心角の関係から、

$$m\angle BCA = (m\angle BOA\,(\text{大きい方}))/2 = (2\alpha)/2 = \alpha$$

従って、

$$m\angle BCA = m\angle BAD(=\alpha)$$

[証明（後半）終わり]

3　ピタゴラスの三平方の定理のあまり知られてない証明法

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/19]

かの有名なピタゴラス（Pythagoras）の三平方の定理は、以下の様なものである：

定理 3.1（三平方の定理）　$\angle C$ が直角な直角三角形 $\triangle ABC$（図 3 A）において、その斜辺（$\overline{AB}$）の長さの平方は、残りの二つの辺（$\overline{AC}$ と $\overline{BC}$）の各々の長さの平方の和に等しい、即ち、

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

我々が子供の頃は、これは確か中学三年の時に習ったと思うが、私は（恐らく姉か兄の『中三コース』もしくはその付録を見て）中学一年の頃にはその存在を知っていたし、（確か）中学２年で相似図形について学んだ時に、その（一般にはあまり知られていない）証明法を思いついた。

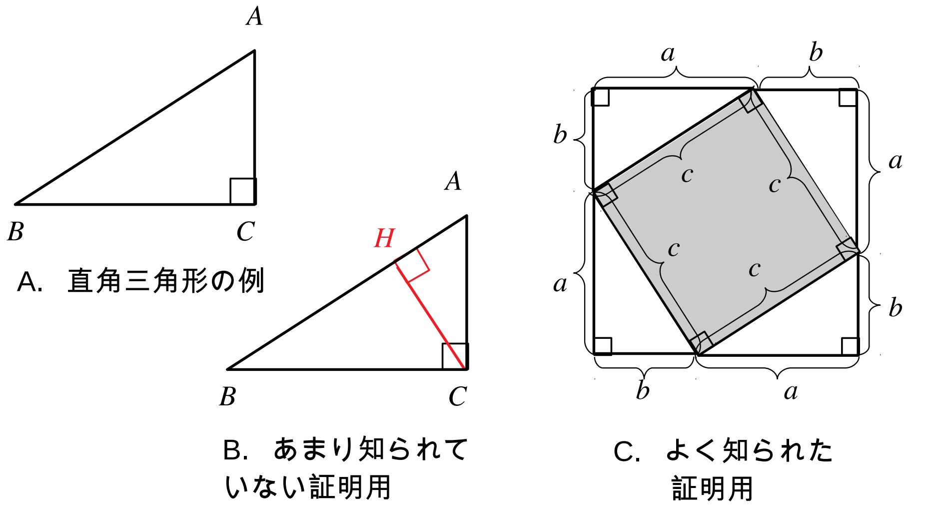


図 3　ピタゴラスの三平方の定理とその証明に用いる図。**A.** ここで例示する直角三角形。**B.** あまり知られてない証明用。**C.** よく知られた証明用。

その証明法は以下の様である。

最初に、直角（$\angle C$）から斜辺 $\overline{AB}$ へ垂線を引き、その斜辺との交点を H とする（図 3 B)。すると、

先ず、$\triangle CBH$ と $\triangle ABC$ は、どちらも $\angle B$ を有した直角三角形なので、互いに相似である。よって、$AB : BC = BC : BH$、即ち、

$$BC^2 = AB \times BH \tag{3}$$

次に、$\triangle CAH$ と $\triangle BAC$ は、どちらも $\angle A$ を有した直角三角形なので、互いに相似である。よって、$AB : AC = AC : AH$、即ち、

$$AC^2 = AB \times AH \tag{4}$$

最後に、式（3）と式（4）を辺々足し合わせると、

$$BC^2 + AC^2 = AB \times (BH + AH) = AB^2 \tag{5}$$

これは、まさに我々が欲しい式である。

[証明終わり]

私の記憶が正しければ、この証明法は、私が使った教科書、参考書、問題集のどれにも載っていなかった。ちなみに、それらによく載っていた「標準的な」証明法は、以下の様なものである。

図 3 C の様に、一片が $a+b$ の正方形の内側に、直角を挟んだ二辺が a および b である様な直角三角形を 4 つ埋め込む。そうしてできた内側の四角形（灰色の領域）は各々の辺が直角三角形の斜辺（長さを c と記す）で与えられる正方形となる。その内側の正方形の面積を 2 通りのやり方で計算すると、

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \times (ab/2) = a^2 + b^2$$

となり、三平方の定理が証明される、といった具合である。

この（標準的）証明法はエレガントで何の問題もないのだが、ある定理の証明法（あるいはある公式の導出法）は必ずとも一通りだけ とは限らないことを心得ておくことは、後に難しそうな問題に直面した際に、幾つもの「解法へのルート」を思いつき、その結果として、問題を解決できる可能性が高まることにつながる。

一方、こういった問題の採点者の方々は、（一般の問題に対しても）模範解答に示された解法以外にも解き方があり得る ことを心得ておくことにより、「実は正解だったのに誤りと見なしてしまった！」というミス（あるいは悲劇）を防ぐことができる。

4 円周率 π（$= 3.141592\cdots$）の求め方

江澤　潔　[手書き：2020/12/01-02; 電子文書化：2021/02/19-21]

円周率 $\overset{\text{パイ}}{\pi}$（$= 3.141592\cdots$）は数学、特に幾何学、複素関数論、フーリエ（Fourier）解析等で非常に重要な役割を果たす定数である。π は無理数（分子と分母が整数である様な分数として表せない数）の一つであり、その中でも超越数（有理数を係数とする代数方程式の解になり得ない数）に属することがわかっている、、、らしい。[私はその証明法を知らない。興味ある方は自分で調べられたし。] 巷では、円周率 π のすべての桁を（分かっている所まで）示した、一般人には非常に退屈な本も出版されているらしいし、時々テレビ等には π を何万（?）桁まで覚えているという人々も登場したりする。

私はそういった人々は素直にすごいと思い、称賛を惜しまない。その一方で、私は科学者の端くれである為、「π を何桁まで覚えたか？」よりも「どうすれば π を 何桁までも求めることができるか？」の方が興味がある。π の数値を示した本が出版されているくらいだから、その様な方法はすでに確立しているハズであるが、残念ながら、私はその正確な方法は知らない。

私は、科学者たる者にとって、ある問題の解決法を色々と知っているのは確かに大切だと思うが、それ以上に、自分の持ち合わせた知識から 直面した問題に対する「自分なりの解決法」を思いつく能力の方がより大事である と思っている。

と言う訳で、以下に、よく知られた π の求め方と共に、私自身で考えた方法を記すことにする。

[注 : 以下では、コンピュータ上で何万桁もの数値の計算（四則演算等）を能率よく行えるツール（あるいはシステム）がすでに存在すると仮定する。本当は、どうやってその様なツール（あるいはシステム）を実現（あるいは実装）するか？の方が深刻な問題かもしれないが、それを考案するにはコンピュータシステムについての深遠な知識が必要であり、私の専門領域を超えるので、ここでは割愛させて頂く。興味ある方々は自分で調べて頂けたら幸いである。]

4.1 [方法 1] 実際に長さ／面積／体積を測る方法

多くの方々は、小学校の算数もしくは中学校の数学の授業等で、実際に円の周囲と直径を測って、その比率から π を近似的に求めた（あるいは教師等がそれを実演して見せた）経験があるのではないかと思う。

半径 R の円の円周の長さは $2\pi R$、面積は πR^2 であることから、

$$\pi = \frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})} \qquad \text{（これがそもそもの定義）}$$

あるいは

$$\pi = \frac{(\text{円の面積})}{(\text{半径})^2} \qquad \text{（ちょっと捻った求め方）}$$

として、 π の数値が求められる筈である。

この方法の利点は、物差し（あるいは巻尺）さえあれば、誰でも実施できる手軽さである。しかしながら、 π を何桁も精度よく求めようとすると、たちまち 技術的な困難 に直面する。例えば、本当に「まん丸い」正確な円を作る難しさ、その長さや面積（あるいは円筒の体積や重さ（質量））を正確に測る難しさ、等があり、この方法で 5 桁以上まで正確に π を求めるには、相当に高度な工学的技術を要することが予想される。

そして、いくら高度な工学的技術をもってしても、「物体は原子、分子で出来ている」という事実からくる 原理的な限界なるものが存在する。例えば、長さを測るやり方では、原子のサイズが $\mathring{A}$（オングストローム）($= 10^8$ cm) のオーダーであるので、正確な円を工作できる典型的なサイズを 10 cm とすると[*9] どんなに正確に測ったとしても、$(10^{-8})\ /10 = 10^{-9}$ 程度の誤差はどうしても生じるであろう。即ち、どんなに頑張っても

[*9] 私は工学的知識を持ち合わせていないので、本当のところはどうだかわからない。従って、10 cm は単なる仮定である。

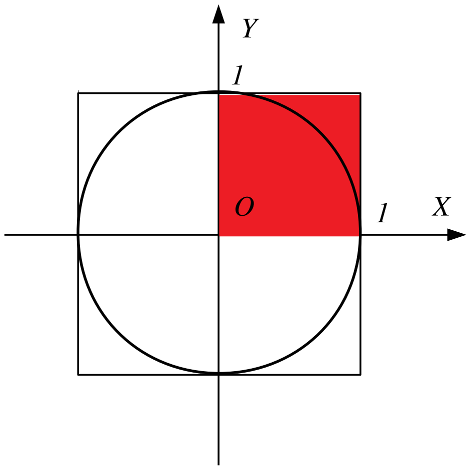


図 4　**円周率のモンテカルロ法による計算（概念図）。**本文で説明された方法で使われる領域は赤塗りされている。

１０桁程度が限界 ということである。そして、実際には、（密度等の）熱揺らぎ等もあるので、実際の限界桁数はもっと小さいかも知れない。従って、 π の数値を何万桁も求めるには、別の方法に頼らざるを得ない。

4.2　[方法２] モンテ・カルロ法

これは、円周率の測定を確率の問題に置き換える方法である。実は、私が昔に読んだBASIC 言語でのプログラムの入門書（大変申し訳ないが、タイトルと著者名を忘れてしまった）に記述されていた方法である。

比喩的に表現すると、図 4 の様に、一辺が 2m の正方形に半径 1m の円をはめ込み、それに向けて 全く無作為に ダーツの矢を投げて、円内に刺さった矢の数と正方形全体に刺さった矢の数の比を求める方法である。（この比が $\pi/4$ を近似する。）

この状況をコンピュータシミュレーションで模倣するには、例えば、０から１までの実数値を取る（擬）乱数 の対を発生させて、それぞれ X と Y とし、全ての試行の中で $X^2+Y^2 \leq 1$ となる相対頻度を求め、それで $\pi/4$ を近似する。[*10] （ちなみに、この様な方法を、モンテ・カルロ（Monte Carlo）シミュレーションと呼ぶ。）

この方法の良いところは、初歩的なプログラミング能力さえあれば、誰でも簡単に実施できることである。

*10　この場合、図 4 の第一象限（赤い領域）のみを用いていることに相当する。

欠点は、十分な精度 を稼ぐには かなりの時間が かかるということだ。例えば、N 回の試行の結果で $\pi/4$ を近似すると、結果（p_N と表現する）は、試行回数 N で「成功率」$\pi/4$ の二項分布に従うので、概ね

$$\frac{\pi}{4} - 2\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{N}} < p_N < \frac{\pi}{4} + 2\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{N}}$$

の範囲内に納まり、大雑把に言って $1/\sqrt{N}$ 程度の誤差が見込まれる。

一方、有限の時間内に行える試行数（N）には限りがある。例えば、一秒間に 10^{20} 対の（擬）乱数 対を生成できるコンピュータを用いたとし、それが宇宙の始まり（約１３７億年前）から今までに行える試行数を N^* 回と表すと、

$$\begin{aligned} N^* &\sim 1.37 \times 10^{10}(\text{年}) \times 365\,(\text{日／年}) \times 24\,(\text{時間／日}) \times 3600\,(\text{秒／時間}) \times 10^{20}(\text{回／秒}) \\ &\sim 4 \times 10^{37}(\text{回}) \end{aligned}$$

となり、それで達成できる精度は大体、$1/\sqrt{N^*} \sim 10^{-19}$ のオーダーとなる。即ち、宇宙のはじめから現在まで高速コンピュータで試行を繰り返したとしてもπ の数値はせいぜい２０桁まで しか求まらない。[*11]

4.3 [方法３] 三角関数の間の不等式と半角の公式を用いる方法

ここでは、二つの三角関数、正弦（sine）と正接（tangent）、の満たす不等式：

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \tag{6}$$

を利用する。（ここで、θ はラジアンの単位で測られた角度で、$0 \leq \theta < \pi/2$ とする。）

この不等式は、高校数学の私の教科書のコラム欄や、参考書等に記述されていたようなおぼろげな記憶があるが、以下の様にして導出できる。

[導出]

図 5 の様に、半径 R の円の中心を O とし、扇型 OAB とそれに（水平線に対し）線対称な扇型 OCB を考え、簡略化の為、$m\angle AOB = m\angle COB = \theta$ とおく。

先ず、「２点間を最短距離（道のり）で結ぶ線は直線である」というユークリッドの公理に従い、

$$2R\sin\theta = AC\,(\,=\text{線分}\overline{AHC}\text{の長さ}) < \text{弧}\ \overset{\frown}{ABC}\ \text{の長さ} = 2R\theta$$

[*11] なお、コンピュータで生成できるのは真の乱数ではなく擬乱数である、という問題もあるが、最近の性能良い擬乱数プログラム（又は関数）は N^* を優に超える長い周期をもつので、この問題はここでは表面化しないであろう。

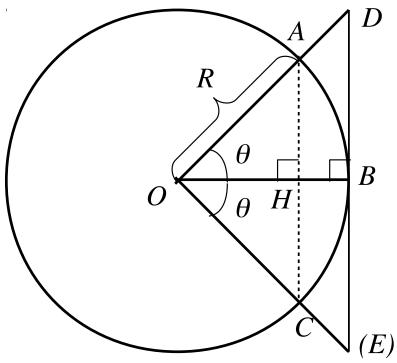


図 5　三角関数の間の不等式 の導出。

これより、$\sin\theta < \theta$ が示せた。[*12]

次に、点 B で円に接する接線を一辺とする直角三角形 $\triangle DOB$ を考えると、これは扇型 AOB を必ず内包するので、明らかに、

$$R^2\theta/2 \ = \ \text{扇型}\,AOB\,\text{の面積} \ < \ \triangle DOB\text{の面積} \ < \ (R^2\tan\theta)/2$$

これより、$\theta < \tan\theta$ が示せる。

上記 2 つの不等式を合わせると、 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ となり、これはまさに我々が導出したい不等式、式（6）に他ならない。

[導出終わり]

この式（6）は、それだけでも円周率 π の値の範囲を決めるのに有用である。

例えば、$\theta = \pi/4$（$= 45°$）とすると、図 6 A の様に、円に内接および外接する正方形を用いたことに相当する。この場合、式（6）は、具体的には、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{4} < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

即ち、$2\sqrt{2} < \pi < 4$ となる。この上限 4 はまさに、古代エジプト人が π の近似値として用いていたとされる数値である。

[*12] $\triangle OAC$ の面積が必ず扇型 $OABC$ の面積より小さい事からも導出できる。

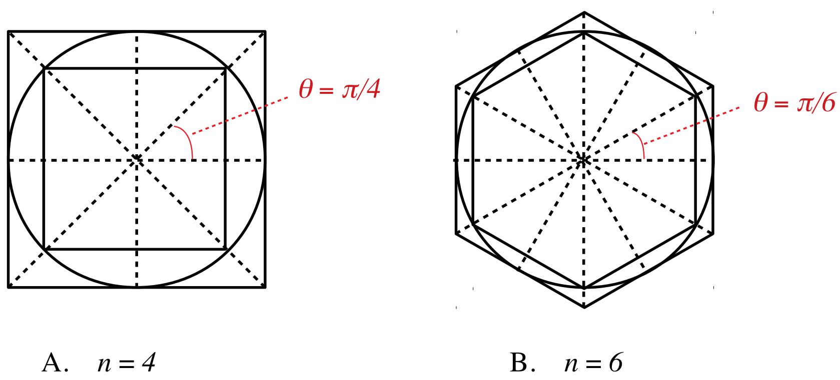


図 6　円に内接および外接する正 n 角形。**A.** 正方形（$n=4$）。**B.** 正六角形（$n=6$）。

次に、$\theta=\pi/6$（$=30^\circ$）とすると、図 6 B の様に、円に内接および外接する**正六角形**を用いたことに相当する。この場合、式（6）は、具体的には、

$$\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\pi}{6}<\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即ち、$3<\pi<2\sqrt{3}$ となる。この下限 3 は、「ゆとり世代」が学校で習った π の近似値と同じである。

この様に、$\theta=\pi/n$（$n\geq 3$）の場合は、円に内接および外接する 正 n 角形の辺の長さおよび面積と円 の円周の長さおよび面積 との比較 に帰着できるので、三角関数について知らない 小・中学生でも この方法を用いてπ の範囲を 定めることができる！そういう意味では、これは**非常に教育的**な方法だとも言える。

更に、賢い生徒ならすぐに気づくと思うが、正 n 角形の角の数（即ち n）を増やせば増やすだけ範囲が狭まり、より正確な π の近似ができるようになる。

これを体系的に実現する一つの方法として、**三角関数の半角の公式**を用いることが考えられる。半角の公式は、（いちいち暗記しなくても）倍角の公式、

$$\cos\theta=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

を用いれば、簡単に導け、次のようになる：

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\quad,\quad\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\quad,\quad\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

これらを適当な初期値（$\theta = \theta_0$ と記す）より初めて、例えば k 回繰り返して適用すると、式（6）は、$\sin(\theta_0/2^k) < (\theta_0/2^k) < \tan(\theta_0/2^k)$、即ち、

$$2^k \times \sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) < \theta_0 < 2^k \times \tan\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \tag{7}$$

となり、k が増えるにつれて π の範囲はどんどん狭まる。

三角関数の Taylor 展開によると、

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5) \quad , \quad \tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + O(\theta^5)$$

であるので、この不等式（7）自体は $O(\theta^2) \sim O((1/2^k)^2 = 2^{-2k}) \sim O(10^{-0.6k})$ の精度で π の範囲を狭められるが、**「近似関数」**として、

$$p^{(k)}[\theta_0] \stackrel{\text{def}}{=} 2^k \times \left\{\frac{2\sin\theta + \tan\theta}{3}\right\}\Bigg|_{\theta=\theta_0/2^k} \tag{8}$$

を用いると、Taylor 展開の $O(\theta^3)$ 項が相殺し、π を誤差が $O(\theta^4) \sim O(10^{-1.2k})$ の精度で近似できることとなる。

これは、前出２つの方法と較べて格段に能率の良い 方法である。例えば、π を１０万桁まで求めたい場合でも、半角の公式を約 10 万（$= 10^5$）回繰り返して式（8） で $k \sim 10^5$ とした近似関数を求めれば OK である。

考え得る一つの問題は、半角の公式で 10 万桁の数の平方根を求めるのは早くできるのか？であるが、平方根を求める計算法（開平法と呼ばれる）は、筆算の方法が確立しており、また、そろばんを用いてする方法も存在する様なので、恐らくは、コンピュータ上で開平法を効率よく行うアルゴリズムも存在する筈である。仮に、N 桁の数値の開平に $O(N)$ 会の基本演算が必要だとしても、π を N 桁まで求める場合の基本演算の回数はせいぜい $O(N^2)$ となり、上記の様に $N \sim 10^5$ でも $O(10^{10})$ にしかならず、現在の高速コンピュータなら「あっという間に」答えを与えてくれるであろう。[*13]

4.4 [方法４] Arctan (x) の積分表示を用いる方法

[方法３] は十分早いハズなので、実用的にはそれだけあれば問題ないハズだが、同じ問題でも複数の解決法があるのは強みとなるので、ここ（および次の小節）では別のアプ

---

*13 もう一つの問題は、$\sin\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ や $\tan\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ を半角の公式で求める際に「１引く｛ １に非常に近い数 ｝」を計算する為、大規模な（求めたい桁数の倍程度の桁数の）**「桁落ち」**が生じることである。この為、計算する際には、求めたい桁数の３倍程度の桁数まで計算しておかなければならないかも知れず、（３倍程度）余計にメモリーを確保する必要があるかも知れない。

ローチを考える。

$x = \tan\theta$（$-\pi/2 < \theta < \pi/2$）の時、その逆関数は $\theta = \arctan(x)$ と表記し、次の積分で求められる：

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \tag{9}$$

［ 導出 ］

上記積分で $t = \tan\theta$ と置くと、 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ および $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ 。これより、

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\arctan(x)} d\theta \frac{\left(\frac{dt}{d\theta}\right)}{1+t^2} = \int_0^{\arctan(x)} d\theta \frac{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)} = \int_0^{\arctan(x)} d\theta \;=\; \arctan(x)$$

［ 導出終わり ］

一つのアイディアとしては、例えば、式（9）で $x = 1$ と置いて、

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

とし、右辺を**数値積分** で求めるやり方がある。例えば積分区間を 2^k 等分すると、積分を台形公式で近似した場合、$O((1/2^k)^2) \sim O(10^{-0.6k})$、シンプソン（Simpson）の公式を用いた場合、$O((1/2^k)^4) \sim O(10^{-1.2k})$、の精度で π を近似できる。

しかしながら、このやり方の問題点は、大雑把に言って 2^k 個の点における被積分関数を計算して求めなければならないことである。[方法２] でやったのと同様に、一秒間に 10^{20} 点での被積分関数値を計算できるコンピュータがあったとして、それを宇宙の初めから現在まで走らせたとすると、約 4×10^{37} 点で被積分関数を計算でき、シンプソンの公式を用いた場合、π は、大雑把に言って $(1/(4 \times 10^37))^4 \sim 4 \times 10^{-151}$ の精度、つまり、大体１５０桁くらいまで計算できる、ということになる。これは [方法２]（モンテ・カルロ）に較べるとかなり速いが、[方法３]（半角の公式）に較べると格段に遅い。

しかしながら、もう少し工夫すれば 、この $\arctan(x)$ の積分表示に基づいて、π をもっと速く、 精度よく計算できる。

その為には、まず、被積分関数をテイラー（Taylor）展開し、$\arctan(x)$ 自体をテイラー級数で表示し直す：

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x dt \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
&= x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \right] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

そして、x として、できるだけ小さくて $\arctan(x)$ が π の整数分の 1 になる様な値を用いる。例えば、$x = 1/\sqrt{3}$ を式（10）に代入すると、$\pi/6 = \arctan(1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3}) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (1/\sqrt{3})^{2n} \right]$、即ち、

$$
\pi = 2\sqrt{3} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] \qquad (11)
$$

となる。この級数をコンピュータを用いて $n = 1$ から漸次、求めていけば良い。級数の各項に現れるべき乗、$(1/3)^n$、は、漸化式、$(1/3)^n = (1/3) \times (1/3)^{n-1}$、を用いれば、漸次、単なる 1/3 の乗法（もしくは 3 による除法）を行うだけで求められるので何の問題もない。

この方法でテイラー級数の N 番目の項まで計算した時の π の誤差は $O((1/3)^N) \sim O(10^{-0.48N})$、つまり、$\pi$ をおおよそ $0.48N$ 桁まで計算できる。従って、もし 10 万（$= 10^5$）桁まで π を求めたい時は、テイラー級数を $n = 1$ から大体 $n \sim 2 \times 10^5$ まで計算すればいいだけなので、これは 非常に効率の良い 計算法だと言える。（恐らく [方法 3] よりも効率が良い。）

4.5 [方法 5] Arcsin (x) の積分表示を用いる方法

$x = \sin\theta$ （$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$）の時、その逆関数は $\theta = \arcsin(x)$ と表記し、次の積分で求められる：

$$
\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (12)
$$

[導出]

上記積分で $t = \sin\theta$ と置くと、$\frac{dt}{d\theta} = \cos\theta$ および $\sqrt{1-t^2} = \cos\theta$ 。これより、

$$
\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\arcsin(x)} d\theta \frac{\left(\frac{dt}{d\theta}\right)}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\arcsin(x)} d\theta \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \int_0^{\arcsin(x)} d\theta = \arcsin(x)
$$

[導出終わり]

この場合も、例えば $x = 1/2$ 等と置き、式（12）の右辺の積分を数値計算しても π を

求められることは求められるが、[方法４] の前半で論じたのと同様にかなり遅い計算法となる。

そこで、ここでも式（12）の右辺の被積分関数をテイラー展開して、$\arcsin(x)$ をテイラー級数で表す：

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \int_0^x dt \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t^2)^n \right] \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1} x^{2n} \right] \qquad \left(\text{ここで } C_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

この場合、最右辺での係数、C_n、が一見複雑そうだが、漸化式、

$$C_n = \frac{n-\frac{1}{2}}{n} \times C_{n-1}$$

を用いて漸次計算できるので、さほど問題にはならない。

更に、式（13）に $x = 1/2$ を代入すると、$\pi/6 = \arcsin(1/2) = (1/2) \times [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1}(1/2)^{2n}]$、即ち、

$$\pi = 3\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \tag{14}$$

となる。この場合、式（14）のカッコ内の級数を $n = 1$ から $n = N$ まで計算した時の π の誤差は大雑把に言って $O((1/4)^N) \sim O(10^{-0.6N})$ となる。つまり、π を大体 $0.6N$ 桁まで計算したことになる。この場合も（例えば）10 万桁まで π を求めたい場合は、大体 $N \sim 10^5/0.6 \sim 17$ 万項目まで級数を計算すればよいので非常に効率のよい計算法となる。（ただし、[方法４] とどちらが速いかは、細かな要素も絡んでくるので定かではない。）

4.6　[まとめ]

この様に、円周率 π（パイ）（$= 3.141592\cdots$）を非常に精度よく求める方法は一通りではなく、それぞれ長所もあれば短所もある。また、フーリエ解析や複素関数論等も絡めたりすれば、更に多くの求め方が考えられるであろう。読者の方々も「自分なりの求め方」を考案してみられてはいかがだろうか。きっと良い数学の演習問題になると思う。

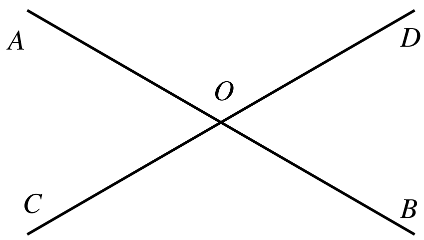


図 7　対頂角。

5　ユークリッド幾何学における基本定理の証明

江澤　潔　[手書き：2020/12/03-04; 電子文書化：2021/02/21-26]

ユークリッド（Euclid）幾何学に関しては、小学・中学・高校でさんざん学んで来られた事と思うが、ここでその基本定理についておさらいしておこう。

5.1　対頂角

定理 5.1　対頂角の大きさは等しい。例えば、図 7 において、

$$m\angle AOC = m\angle BOD \quad , \quad m\angle AOD = m\angle BOC$$

［証明］図 7 で、

$$\begin{aligned} m\angle AOD + m\angle DOB = m\angle AOB = \pi(= 180^\circ) \quad &(\text{一直線}), \\ m\angle AOC + m\angle AOD = m\angle COD = \pi(= 180^\circ) \quad &(\text{一直線}) \end{aligned} \tag{15}$$

よって、

$$m\angle AOD + m\angle DOB = m\angle AOC + m\angle AOD$$

両辺から $m\angle AOD$ を差し引くと

$$m\angle DOB = m\angle AOC$$

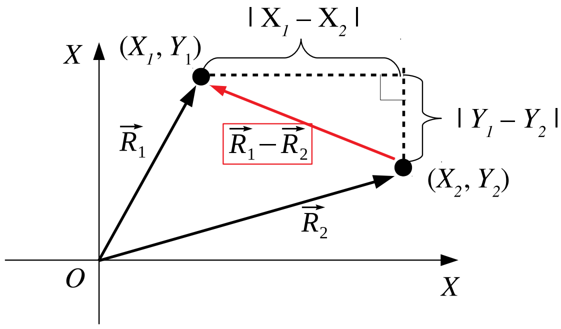


図 8　二点間の距離。

同様にして、$m\angle AOD = m\angle BOC$ も示せる。 [証明終わり]

5.2　2 点間の距離

定理 5.2　図 8 の様に、デカルト（Descartes）座標で表されたユークリッド平面上の 2 点、$\vec{R}_1 = (X_1, Y_1)$ と $\vec{R}_2 = (X_2, Y_2)$ の間の距離は、次式で与えられる：

$$\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} \tag{16}$$

[証明]

これは、ピタゴラスの三平方の定理（定理 3.1）の応用で、2 点間の距離は、図 8 の様に、直角をはさむ二辺の長さが $|X_1 - X_2|$ と $|Y_1 - Y_2|$ である様な直角三角形の斜辺の長さに他ならないので、式（16）右辺で与えられる。（なお、それは図の赤いベクトルで示す様に、ベクトルの差、$\vec{R}_1 - \vec{R}_2$ 、の大きさでもあるので、左辺のようにも表記される。）

[証明終わり]

5.3　余弦定理と正弦定理

定理 5.3（余弦定理）　図 9 A の三角形 $\triangle ABC$ に関し、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(m\angle A) \tag{17}$$

（長さ AB や AC も同様に、それぞれ、$\cos(m\angle C)$ や $\cos(m\angle B)$ を用いて表せる。）

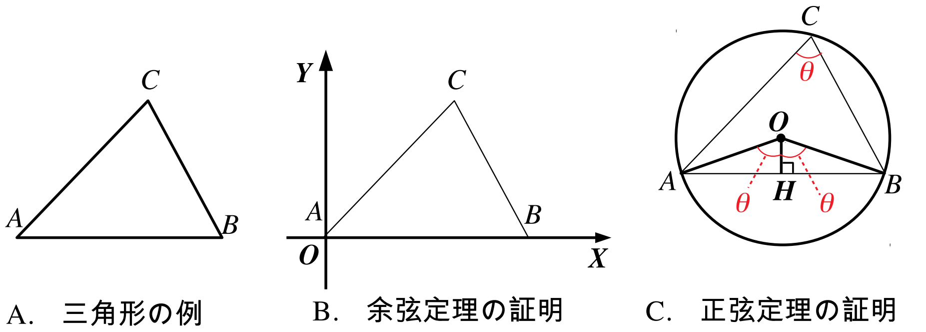


図 9　**余弦定理と正弦定理。A.** ここで例示する三角形。**B.** 余弦定理の証明。**C.** 正弦定理の証明。

[証明]

図 9 B の様に座標系を取ると、点 A は $(0,0)$、点 B は $(AB,0)$、そして点 C は $(AC\cdot\cos(m\angle A), AC\cdot\sin(m\angle A))$ に位置する。定理 5.2 を用いて、

$$
\begin{aligned}
BC^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 &= (AB - AC\cdot\cos(m\angle A))^2 + (AC\cdot\sin(m\angle A))^2 \\
&= AB^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos(m\angle A) + AC^2(\cos^2(m\angle A) + \sin^2(m\angle A)) \\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos(m\angle A)
\end{aligned}
$$

これはまさに余弦定理の式（17）に他ならない。

[証明終わり]

定理 5.4（正弦定理）　やはり図 9 A の三角形 $\triangle ABC$ に関し、

$$
\frac{BC}{\sin(m\angle A)} = \frac{CA}{\sin(m\angle B)} = \frac{AB}{\sin(m\angle C)} \tag{18}
$$

[証明]

図 9 C の様に $\triangle ABC$ の外接円を描き、その中心を O、半径を R とする。

すると、$\triangle AOB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形で、O から $\overline{AB}$ に垂線を引き、交点を H とする。次に、中心角と円周角の関係（補遺 C を参照）より、

$$
m\angle AOB = 2m\angle C
$$

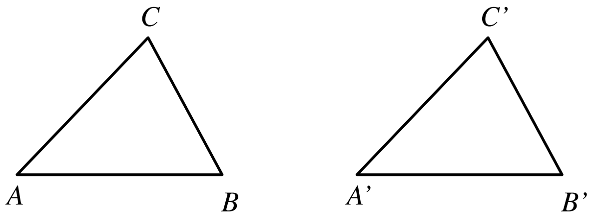


図 10　二つの三角形の例。

次に、$\triangle AOH$ と $\triangle BOH$ は、$\overline{OH}$ を共有し、$OA = OB$ かつ $m\angle AHO = m\angle BHO = \pi/2$ なので互いに合同（$\because$ 直角三角形の合同条件（**後述!**）の一つより）。よって、

$$m\angle AOH = m\angle BOH = \frac{1}{2}m\angle AOB = m\angle C \quad (= \theta)$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} AB = AH + BH = OA\sin(m\angle AOH) + OB\sin(m\angle BOH) \\ = = R\sin(m\angle C) + R\sin(m\angle C) = 2R\sin(m\angle C) \end{aligned} \tag{19}$$

即ち、$AB/\{\sin(m\angle C)\} = 2R$。$\angle A$ と $\angle B$ に対しても同様にして、

$$\frac{BC}{\sin(m\angle A)} = \frac{CA}{\sin(m\angle B)} = \frac{AB}{\sin(m\angle C)} = 2R$$

よって、正弦定理の式（18）が証明され、更にそれらの比が外接円の直径（$2R$）に等しいことも示された。

[証明終わり]

5.4　三角形の合同と相似

定理 5.5（三角形の合同条件）　図 10 の二つの三角形、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$、は次のいずれかが成立すると合同である：

1)　三辺（の大きさ）が等しい；

2)　二辺（の大きさ）とそれに挟まれた角（の大きさ）が等しい；

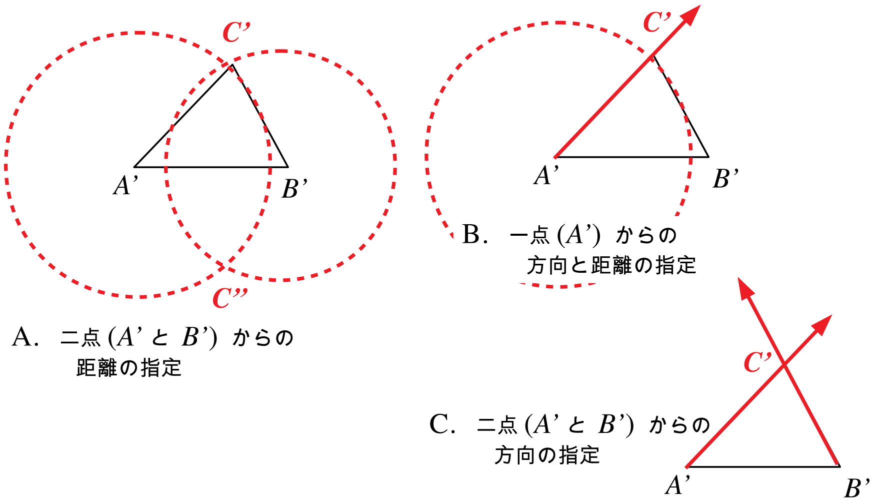


図 11　**三角形を一意的に決める条件。**いずれも、すでに一辺 $\overline{A'B'}$ は指定されたとする。**A.** 二点、A' と B'、の各々からの距離の指定。**B.** 一点（例えば A'）からの方向と距離の指定。**C.** 二点、A' と B'、の各々からの方向の指定。

3)　二角（の大きさ）とそれに挟まれた辺（の大きさ）が等しい。

[証明（又は解説）]

平面上の三点（元々は自由度（座標の数）が $2 \times 3 = 6$）が、どうやったら、位置の移動（2 自由度）と回転（1 自由度）（および鏡映（0 自由度））を残して一意的な位置関係を形成できるかどうかを調べる。*14 まず、2 つの位置の自由度があるので、それを利用して点 A' を固定（あるいは指定）してしまう。次に、回転の自由度 1 があるので、それを利用して点 A' から点 B' への方向を固定（あるいは指定）する。

そうすると、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が、「まったく同じ大きさ&形」（即ち**合同**）になる為には、まず、距離 $A'B'$ が距離 AB に等しくなる必要がある。これで自由度が更に 1 減り、残りは、点 C' の位置を定める 2 自由度（即ち、点 C' の X & Y 座標）のみとなる。これを一意的に定める為には、2 つの条件（あるいは等式）を課す必要がある。

1) の場合、点 C' を固定するのに、2 点、A' と B'、からの距離を指定している（図 11 A)。これにより、点 C' は、点 A' を中心とした半径 AC の円と、点 B' を中心とした半径 BC の円との交点として固定される。*15

*14　ここでは、「ユークリッド空間は一様（場所による性質の違いがない）かつ等方（方向による性質の違いがない）である」という暗黙の了解（あるいは公理）があるとする。

*15　一般的に、2 つの円は 2 点（図の C' と C''）で交わる。一方は、$\triangle ABC$ とまったく同じ形になる様な

2) の場合は、点 C' を固定するのに A' と B' のうち一点（例えば A' とする）からの距離と方向を指定している（図 11 B)。具体的には、（点 A' から出て）線分 $A'B'$ と $m\angle A$ の角度を形成する様な直線（これも 2 通りある）と、点 A' を中心とした半径 AC の円との交点として、点 C' を固定する。

最後に、3) の場合、点 C' を固定するのに点 A' からの方向と点 B' からの方向を指定している（図 11 C)。具体的には、点 A' から出て線分 $A'B'$ と $m\angle A$ の角度を形成する様な直線と、点 B' から出て線分 $A'B'$ と $m\angle B$ の角度を形成する様な直線との交点として、点 C' を固定する。（この場合も 2 通りある。）

[証明（又は解説）終わり]

[別証明（？）]

合同な 2 つの三角形では、対応するすべての辺の長さが等しく、また、対応するすべての角の大きさが等しい。

1) では既に対応する 3 つの辺の長さが等しいので、余弦定理（定理 5.3）を利用すれば、対応する 3 つの角の大きさも等しいことが示せる。

2) では、対応する 2 辺の大きさとそれに挟まった角の大きさが等しいので、そこに余弦定理（定理 5.3）を適用すれば、残りの一辺の大きさも等しいことが示せる。後は、1）と同様にすれば、残っている二角でも対応する角の多きさが等しいことが示せる。

3) の場合、対応する二角の大きさが等しいので、三角形の内角の和が π（$= 180°$）であることを利用すれば、残りの一角でも対応する角の大きさが等しいことが示せる。あとは、対応する一辺の大きさが等しいことと、正弦定理（定理 5.4）を用いれば、残った二辺でも対応する辺の大きさが等しいことが示せる。

[別証明（？）終わり]

この別証明（？） は、その上の解説よりも分かりやすく、エレガントに見えるかも知れない。問題があるとすれば、それが三角関数の性質（および三角形の内閣の和が π であること）に依存していることであろう。そもそも、三角関数が定義できるのは、この様な合同三角形の性質・条件、および（次に出てくる）相似三角形の性質・条件、があればこそである、と考えると、どうも「巡回論理」の匂いがするのである。（ただし、実際に定まった辺／角から残りの辺／角を求める際には、この方法は実に有効であると言える。）

$\triangle A'B'C'$ を与え、もう一方は、$\triangle ABC$ の「鏡像」となる $\triangle A'B'C''$ を与える。（どちらも「合同」と呼ばれる。）

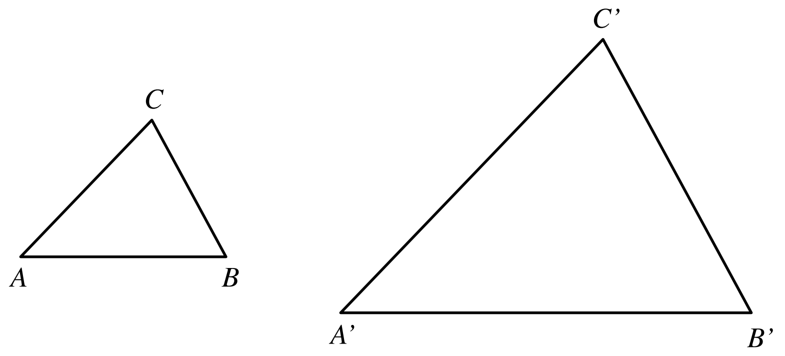


図 12　二つの相似な三角形の例。

定理 5.6（三角形の相似条件）　図 12 の二つの三角形、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$、は次のいずれかが成立すると相似である：

1)　$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$；

2)　$AB : A'B' = BC : B'C'$ かつ $m\angle B = m\angle B'$（もしくは左記で A、B、C を巡回させた関係式）；

3)　二角（の大きさ）が等しい。

[解説]

相似な図形では、形は全く同じだが、大きさだけが異なる。平面上のすべての（閉じた）図形は、複数の三角形の集まり、あるいはその極限、として表すことが可能なので、相似な図形の条件・性質は、相似な三角形の条件・性質に帰着する、といっても過言ではない。

二つの三角形、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$（例えば図 12)、が相似な場合には、以下の性質が成立する：

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' \quad ; \tag{20}$$

$$m\angle A = m\angle A' \quad , \quad m\angle B = m\angle B' \quad , \quad m\angle C = m\angle C' \quad . \tag{21}$$

だから、定理 5.6 に示した各々の条件のセットから残りの等式が示せれば、それは二つの三角形が相似であるのに十分だと言える。上記の定理 5.5 の別証明（？）の様に、正弦定理と余弦定理を用いれば、形式的に 残りの条件を導くことができるのだが、上で論じた様に、どうもそれは「巡回論理」の匂いがする。

一方、定理 5.5 の証明（または解説）で示した様に、上記条件を用いてこれらの条件か

ら三角形 $\triangle A'B'C'$ を一意的に定められることは示せるが、それだけでは、はたして本当にこの一意的な三角形が相似なのかどうか？を（正弦定理、余弦定理を使わずして）どうやって示したら良いのかよくわからない。

そこで、仕方がないので**「次善策」**として、**「ユークリッド空間（平面）に内在的な性質」**として、いかなる三角形 $\triangle ABC$ といかなる相似比 x に対しても（並進と回転（および鏡映）の自由度を除くと）一意的な三角形 $\triangle A_xB_xC_x$ が存在し、

$$AB : A_xB_x = BC : B_xC_x = CA : C_xA_x = 1 : x \quad ; \tag{22}$$
$$m\angle A = m\angle A_x \quad , \quad m\angle B = m\angle B_x \quad , \quad m\angle C = m\angle C_x \quad . \tag{23}$$

が成立するものとする。こうしておけば、定理 5.5 の証明（または解説）で示した様にして、定理 5.6 の条件[*16] から一意的な三角形 $\triangle A'B'C'$ が求まり、それが上記の相似な三角形 $\triangle A_xB_xC_x$ （ただし、例えば $x = A'B'/AB$ と置く）と合同であることが示せるので、（条件以外の）残りの性質も成り立ち、$\triangle A'B'C'$ も $\triangle ABC$ と相似であると言える。

もし誰か、この**「次善策」**も必要なく、論理も巡回しない証明法を知っていたら、是非教えて欲しい。

［ 解説終わり ］

5.5 三角形の内角の和

定理 5.7 三角形の内角の和は π ラジアン（$= 180°$）である。

中学生の頃教わった証明法では、いずれも平行線の性質を利用していたが、そうすると、次に出てくる平行線の性質の証明との間で論理が巡回してしまう。そこで、**ここでは、平行線の性質を用いずに証明する。**

［ 証明 1 ］

図 13 A の様に、$\triangle ABC$ において、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ の中点を描き、それぞれ D、 E、F とする。

この時、$AB : DB = BC : BE (= 2 : 1)$ および $\angle B$ は共有より、$\triangle ABC$ と $\triangle DBE$ は相似、よって、$AC : DE = 2 : 1$ より、

$$DE = \frac{1}{2}AC$$

*16 ただし、条件 3) に対しては、二角に挟まった一辺が比 $1 : x$ を満たすとする。

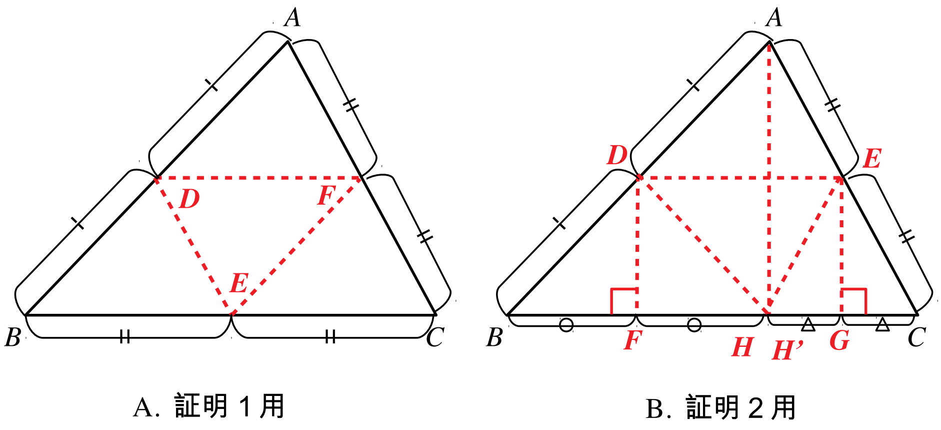


図 13　三角形の内角の和が π であることの証明。**A.** 証明 1 用。**B.** 証明 2 用。

又、$AC : FE = BC : EC (= 2 : 1)$ および $\angle C$ は共有より、$\triangle ABC$ と $\triangle FEC$ は相似、よって、$AB : FE = 2 : 1$ より、

$$FE = \frac{1}{2}AB$$

これより、$\triangle DBE$ と $\triangle FEC$ を比べると、

$$\begin{cases} DB = FE = AB/2 & , \\ DE = FC = AC/2 & , \\ BE = EC = BC/2 & . \end{cases}$$

よって対応する三辺の長さが等しいので、$\triangle DBE$ と $\triangle FEC$ は合同であり、

$$m\angle B = m\angle DBE = m\angle FEC \tag{24}$$

$$m\angle C = m\angle FCE = m\angle DEB \tag{25}$$

次に、$\triangle ADF$ と $\triangle EFD$ を比べると、

$$\begin{cases} AD = EF = AB/2 & , \\ AF = ED = AC/2 & , \\ DF = FD & . \end{cases}$$

よって対応する三辺の長さが等しいので、$\triangle ADF$ と $\triangle EFD$ も合同であり、

$$m\angle A = m\angle DAF = m\angle FED \tag{26}$$

式（24、 25、26）を合わせると、

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle FED + m\angle FEC + m\angle DEB = m\angle BEC = \pi$$

[証明１終わり]

[証明２]

[注：この証明法は、画用紙等で三角形を作って折り曲げて三つの角を合わせるやり方を踏襲している。]

図 13 B の様に、$\triangle ABC$ において、辺 $\overline{AB}$ と辺 $\overline{AC}$、の中点を描き、D、 E とする。更に、点 D、 E のそれぞれから辺 $\overline{BC}$ に垂線を引いてそれらと辺 $\overline{BC}$ との交点をそれぞれ F、G とする。そして、辺 $\overline{BC}$ 上で点 F と G の間に、$BF = FH$ となる様に点 H を、$CG = GH'$ となる様に点 H' を置く。

すると、$AB : DB = HB : FB$（$= 2 : 1$）となり、$\angle B$ を共有しているので $\triangle ABH$ と $\triangle DBF$ は相似、よって、

$$m\angle BHA = m\angle BFD = \frac{\pi}{2} \quad \text{（直角）}$$

又、 $AC : EC = H'C : GC$（$= 2 : 1$）となり、$\angle C$ を共有しているので $\triangle ACH'$ と $\triangle ECG$ は相似、よって、

$$m\angle CH'A = m\angle CGE = \frac{\pi}{2} \quad \text{（直角）}$$

即ち、線分 $\overline{AH}$ も $\overline{AH'}$ も、点 A から辺 $\overline{BC}$ に引いた垂線となるので、両者は一致する。従って、

$$H = H'$$

（以後、この点を表すのに H のみを用いる。）

次に、$\triangle DFB$ と $\triangle DFH$ は、辺 $\overline{DF}$ を共有し、$m\angle DFB = m\angle DFH$（$= \pi/2$）かつ $BF = HF$ なので、（二辺とそれに挟まれた角が等しく）合同。これより、

$$m\angle B = m\angle DBF = m\angle DHF \quad , \tag{27}$$
$$DB = DH \tag{28}$$

同様にして、$\triangle EGC$ と $\triangle EGH$ も合同であることが言えるので、

$$m\angle C = m\angle ECG = m\angle EHG \quad , \tag{29}$$
$$EC = EH \tag{30}$$

最後に、$\triangle ADE$ と $\triangle HDE$ を比べると、

$$\begin{cases} AD = DB = HD & , \\ AE = EC = HE & , \\ \text{辺}\overline{DE} & \text{は共有。} \end{cases}$$

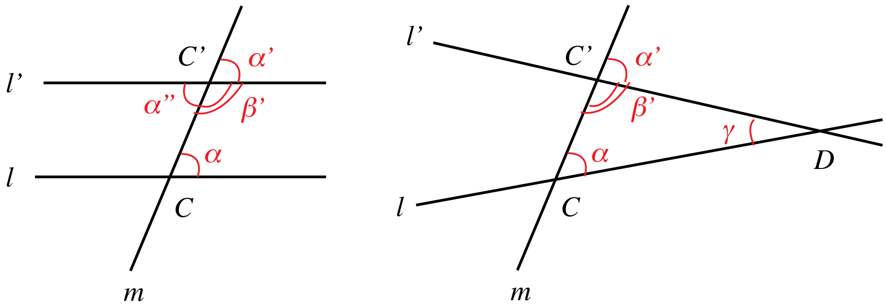


図 14　平行線の性質の証明。**A.** l と l' が平行。**B.** l と l' が非平行。どちらにおいても、C は l と m との交点、そして C' は l' と m との交点。α と α' は同意角。（パネル A において）α と α'' は錯角。パネル B において、D は l と l' との交点、γ はその角度。

よって、$\triangle ADE$ と $\triangle HDE$ は合同。従って、

$$m\angle A = m\angle DAE = m\angle DHE \tag{31}$$

式（27、 29、 31）を組み合わせると、

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle DHE + m\angle DHF + m\angle EHG = m\angle FHG = \pi$$

［ 証明２終わり ］

5.6　平行線の性質

定理 5.8（平行線の同位角）　図 14 A の様に、二つの直線 l、l' にもう一つの直線 m が交わる場合を考える。この時、

同位角 α と α' の大きさが互いに等しいことは、直線 l と l' が互いに平行であることの必要十分条件である。

［解説］私が中学生の時は、単に、「直線 l と l' が平行の時、同位角 α と α' は等しい」とだけ習った記憶があるが、その証明法を 教わった 記憶がない。

それでは、これは平行線に関する公理か？と言うと、平行線の そもそもの定義は：

「二つの直線がどこまで行っても交わらない時、それらは互いに平行と呼ぶ」

のハズであるので、はやり、同位角に関しては証明すべきであろう。ここでその**証明法**を考える。
（上述の**定理 5.7** を用いる。）

[証明]

先ず、直線 l と l' が交わる場合（図 14 B)、その交点を D とし、交わる角度を γ（> 0）とすると、三角形 $\triangle CC'D$ が形成され、定理 5.7 より、$\alpha + \beta' + \gamma = \pi$　。一方、$\alpha' + \beta' = \pi$ なので、

$$\alpha' = \alpha + \gamma > \alpha$$

また、交点 D が α や α' の反対側にある時は、

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta') + \gamma = \pi$$

より、$\alpha + \beta' - \gamma = \pi$　。これと、$\alpha' + \beta' = \pi$ より、

$$\alpha' = \alpha - \gamma < \alpha$$

つまり、直線 l と l' が平行でない時は、同位角は等しくならない。この対偶を取ると：

同意角が等しい（$\alpha' = \alpha$）時、二つの直線（ l と l'）は平行である。

逆に、同意角が等しくない場合（つまり、$\alpha \neq \alpha'$)、$\beta' = \pi - \alpha'$ より、$\alpha + \beta' \neq \pi$　。この場合、直線 m のどちらか側に必ず三角形 $\triangle CC'D$ が出来、その新たな一点 D において、二つの直線 l と l' は交わる。要約すると、同意角が等しくない場合は二つの直線が平行ではない。この対偶を取ると：

二つの直線（ l と l'）が平行の時、同意角は等しい（$\alpha' = \alpha$)。

上記の結果二つを併せると、同意角が等しいことは、二つの直線が平行であることの必要十分条件となる。

[証明終わり]

定理 5.9（平行線の錯角）　図 14 A で、直線 l と l' が平行な時、α とその錯角 α'' も等しい。

[証明]

α の錯角 α'' は、α の同位角 α' の対頂角である。
定理 5.8 より、$\alpha = \alpha'$　。又、定理 5.1 より、$\alpha' = \alpha''$　。

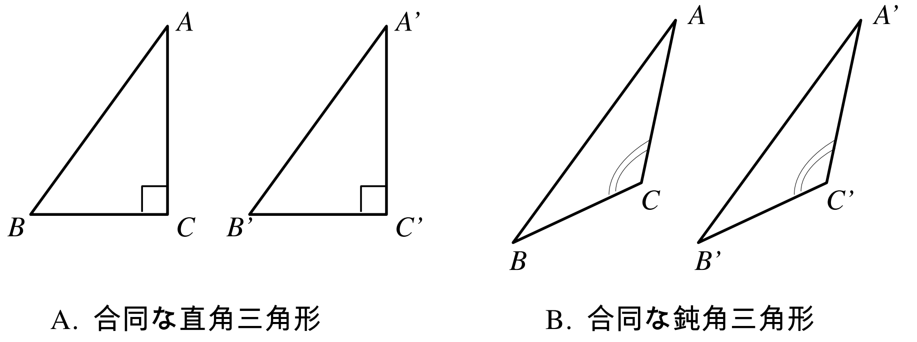


図 15　直角三角形と鈍角三角形の合同。**A.** 合同な直角三角形。**B.** 合同な鈍角三角形。

よって、$\alpha = \alpha''$

[証明終わり]

5.7　直角三角形と鈍角三角形

直角三角形（図 15 A）や鈍角三角形（図 15 B）では、標準的な三角形の合同条件（定理 5.5）と一見異なる条件でも合同になる場合がある。以下、その証明を考える。

定理 5.10（直角三角形の合同条件）　二つの直角三角形(図 15 A の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$)は、以下の場合にも合同となる：

(i)　斜辺と 1 鋭角が等しい（例、 $AB = A'B'$ および $m\angle A = m\angle A'$）;

(ii)　斜辺と他の一辺が等しい（例、 $AB = A'B'$ および $AC = A'C'$）。

[証明]

(i) この場合、一つの角は直角（$m\angle C = m\angle C' = \pi/2$ ）なので、２鋭角の和も直角である（$m\angle A + m\angle B = m\angle A' + m\angle B' = \pi/2$）とわかる。従って、１鋭角が等しいとわかれば、自動的にもう一つの鋭角も等しいと分かるので、三角形の合同条件（定理 5.5）の（３）に帰着する。

(ii) この場合、二つの直角三角形を等しい辺（$\overline{AC}$ と $\overline{A'C'}$）で「背中合わせ」にして二等辺三角形を作れば、$m\angle A = m\angle A'$ が言える（**後述!**）ので、上記の (i) に帰着する。

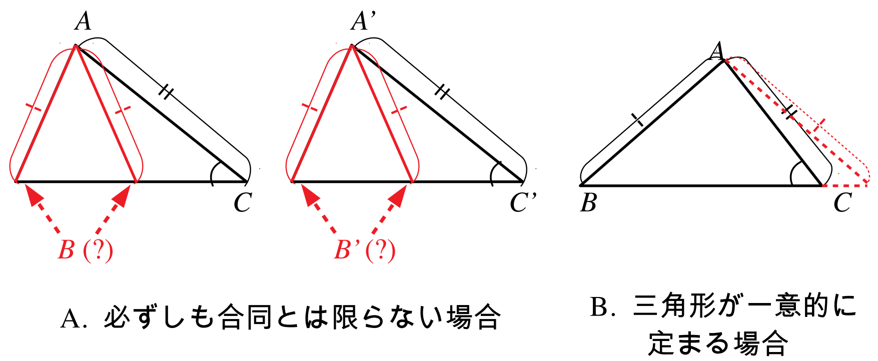


図 16　合同条件（定理 **5.11**）の一般の三角形への拡張。**A.** 必ずしも合同とは限らない場合。**B.** 三角形が一意的に定まる場合。

(ii)（別証明１）正弦定理（定理 5.4）を適用すれば、１鋭角も等しい（今の場合、$m\angle B = m\angle B'$）ことが示せるので、上記の (i) に帰着する。

(ii)（別証明２）ピタゴラスの三平方の定理（定理 3.1）を用いれば、残りの一辺も等しい（$BC = B'C'$）ことが分かるので、三角形の合同条件（定理 5.5）の（１）に帰着する。

[証明終わり]

定理 5.11（鈍角三角形の合同条件）　図 15 B の様に、鈍角が等しい（$m\angle C = m\angle C'$）二つの鈍角三角形、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ 、は、以下の場合にも合同となる：

(ii)′　鈍角の対辺が等しく（$AB = A'B'$）、かつ、他の一辺も等しい（例えば、$AC = A'C'$）。

[証明] 正弦定理（定理 5.4）より、１鋭角が等しい（この場合、 $m\angle B = m\angle B'$）ことが示せ、三角形の内角の和が常に π （$= 180^0$）であることより、もう１鋭角も等しい（$m\angle A = m\angle A'$）ことが導けるので、三角形の合同条件（定理 5.5）の（３）に帰着する。

[証明終わり]

[注意]

一般の三角形で、一つの鋭角（例えば、図 16 A で $m\angle C = m\angle C'$）と、その対辺（$AB = A'B'$）およびもう一辺（$AC = A'C'$）が等しい場合、それだけでは合同とは言えないケースがある。それは、図 16 A の様に、$m\angle B$ が一意的に定まらないケースである。

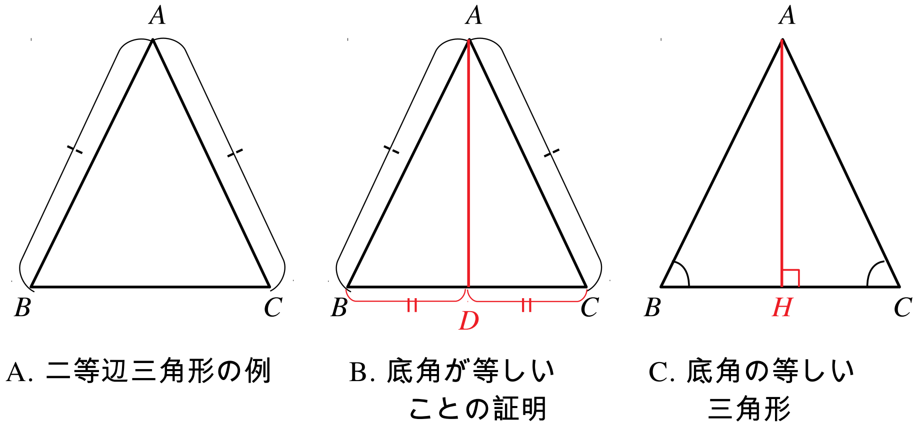


図 17　**二等辺三角形の性質。A.** 二等辺三角形の例。**B.** 底角が等しいことの証明。**C.** 底角の等しい三角形。

この時、正弦定理では、$\frac{AB}{\sin(m\angle C)} = \frac{AC}{\sin(m\angle B)}$ より、

$$\sin(m\angle B) = \frac{AC}{AB}\sin(m\angle C)$$

となるが、$\sin(m\angle B) = \sin(\pi - m\angle B)$ なので、$m\angle B$ にあいまい性が生じる。こういったあいまい性が生じない為には、図 16 B の様に、 $AC \leq AB$ である必要がある。[*17]

即ち、定理 5.10 の (ii) と定理 5.11 の (ii)′ を包摂した、次の様な<u>より一般的な合同条件</u>が成立する：

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で、一角（$m\angle C = m\angle C'$）とその対辺（$AB = A'B'$）が等しく、更に、それよりも短いか等しい一辺が等しい場合（例、$AC = A'C' \leq AB$）<u>も</u>、$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は合同である。

5.8　二等辺三角形

定理 5.12（二等辺三角形の底角）　二等辺三角形の底角は等しい。

[証明 1]

図 17 A の様な二等辺三角形 $\triangle ABC$ （$AB = AC$）とその反対周りの三角形 $\triangle ACB$

*17 ちなみに、$AC = AB$ の時は、二等辺三角形および $m\angle A = 0$ の「つぶれた三角形」が出来て除外される為、一意的に求まる。

とを比較すると、

$$\begin{cases} AB = AC & , \\ AC = AB & , \\ \angle A & \text{は共有} \end{cases}$$

よって、$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ は合同なので、当然、対応する角は等しくなり、

$$m\angle B = m\angle ABC = m\angle ACB = m\angle C$$

[証明 1 終わり]

[証明 2]

図 17 B の様に、底辺 $\overline{BC}$ の中点を D とし、頂点 A と点 D とを結ぶ線分を引く。この時できる $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$\begin{cases} AB = AC & (\because \text{二等辺三角形}) \\ BD = CD & (\because D \text{は} \overline{BC} \text{の中点}) \\ \overline{AD} & \text{は共有} \end{cases}$$

よって、$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ は合同なので、

$$m\angle B = m\angle ABD = m\angle ACD = m\angle C$$

[証明 2 終わり]

[**注：** なお、証明 2 より、線分 $\overline{AD}$ は、$\overline{BC}$ に垂直でかつ、$\angle A$（$= \angle BAC$）を二等分することも、付加的に証明できる。]

定理 5.13　二つの角が等しい三角形は二等辺三角形である。

[証明 1]

図 17 C の様に、三角形 $\triangle ABC$ で、$m\angle B = m\angle C$ の時、点 A から辺 $\overline{BC}$ に垂線を引いてその交点を H とする。こうしてできた $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ において、

$$m\angle AHB = m\angle AHC = \frac{\pi}{2} \quad (\because \overline{AH} \text{は} \overline{BC} \text{の垂線}), \tag{32}$$

$$(m\angle B =) m\angle ABH = m\angle ACH (= m\angle C) \tag{33}$$

これより、また、

$$m\angle BAH = m\angle CAH \tag{34}$$

が成り立つ。更に、

$$\overline{AH} \quad \text{は共通} \tag{35}$$

式（32、34、35）より、三角形の合同条件（定理 5.5）の（３）が成立するので、$\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ は合同。従って、

$$AB = AC$$

即ち、三角形 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

[証明１終わり]

[証明２]

三角形 $\triangle ABC$ に正弦定理（定理）を適用すると：

$$\frac{AB}{\sin(m\angle C)} = \frac{AC}{\sin(m\angle B)}$$

これと、$m\angle B = m\angle C$ より、

$$AB = AC$$

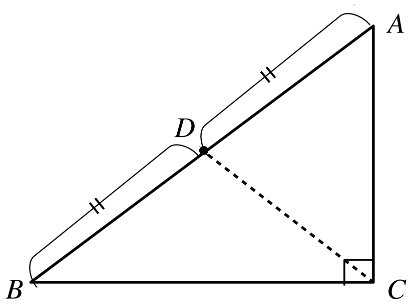
[証明２終わり]

5.9 まとめと例題

以上、定理 5.1 から 定理 5.13 の基本定理を証明した。これらおよびピタゴラスの三平方の定理（定理 3.1)、円の接線は半径（または直径）と直行すること（補遺 B)、および円周角と中心角の関係（補遺 C)、を組み合わせれば、かなり様々な定理を証明できる。(以下、二つほど例題を挙げる。)

これらだけで解くのが難しい問題も多く存在する（例えば、円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）を絡めた問題等）が、それらを解く際には、ベクトルや座標系が活躍する（ハズである)。

数学、とりわけ幾何学、の証明問題は、いわば、論理的思考 の鍛錬 の様なものである。従って、たとえ、証明している事柄自体 が実生活で役に立たなくても、それを証明する事自体は脳の肥やしとなるハズであり、やればやる程、論理の思考能力は鍛えられる。まあ、パズルを解く様な軽い気持ちで数多くの証明問題に取り組んでみてはいかがだろうか。(それに、実際には、実生活の至る所で役に立っているものである。)



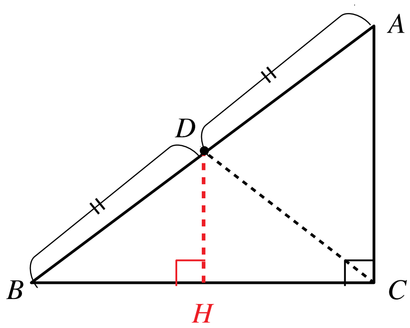


図 18　例題 1 。**A.** 問題用。**B.** 証明用。

[注意] 当然ながら、一般に、一つの命題・定理の証明法は複数個あり得るので、ここに挙げた以外の証明法も存在するハズである。各自、考案されても面白いと思う。

5.9.1　例題 1

図 18 A の直角三角形 $\triangle ABC$ （$m\angle C = \pi/2$ ）で、斜辺 $\overline{AB}$ の中点を D とすると、

$$AD = BD = CD$$

[証明]

図 18 B の様に、中点 D から辺 $\overline{BC}$ へ垂線を引き、交点を H とする。その時、$\triangle ABC$ と $\triangle DBH$ において、$\angle B$ は共有、また、$m\angle ACB = m\angle DHB = \pi/2$ より、$\triangle ABC$ と $\triangle DBH$ は相似。よって、$AB : DB = BC : BH = 2 : 1$ なので、

$$BH = CH$$

次に、$\triangle DBH$ と $\triangle DCH$ を較べると：

$$\begin{cases} BH = CH \quad , \\ \overline{DH} \quad \text{は共有}, \\ m\angle DHB = m\angle DHB = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって、三角形の合同条件（定理 5.5）の（２）が成立し、$\triangle DBH$ と $\triangle DCH$ は合同。従って、$DB = DC$。更に、D は辺 $\overline{AB}$ の中点なので、

$$DA = DB = DC$$

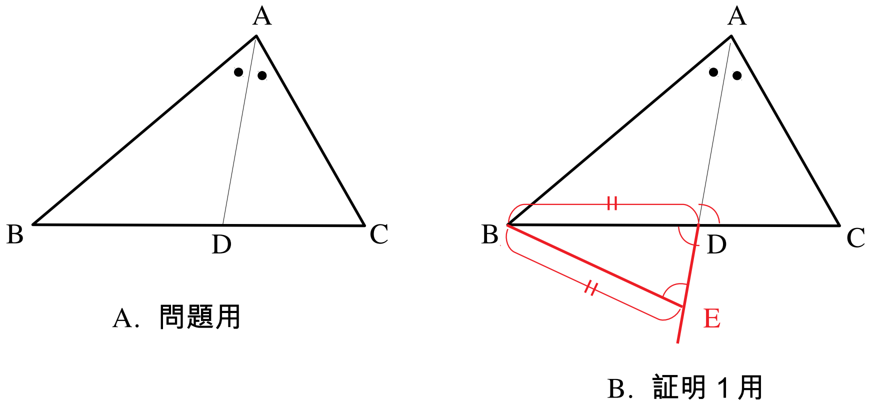


図 19　例題２。**A.** 問題用。**B.** 証明 1 用。

［ 証明終わり ］

5.9.2　例題２

図 19 A の様に $\triangle ABC$ の一つの角 $\angle A$ の二等分線を引き、対辺 $\overline{BC}$ との交点を D とする。この時、

$$AB : AC = BD : CD$$

を証明せよ。

［ 証明１ ］

図 19 B の様に $\angle A$ の二等分線を更に引き伸ばし、その上で $BD = BE$ となる点 E をとる。すると、$\triangle BDE$ は二等辺三角形なので、$m\angle BEA = m\angle BED = m\angle BDE$、そして、$\angle CDA$ は $\angle BDE$ の対頂角なので、

$$m\angle BEA = m\angle BDE = m\angle CDA$$

また、$\overline{ADE}$ が $\angle A$ の二等分線なので、

$$m\angle BAE = m\angle CAD$$

これらより、$\triangle BEA$ と $\triangle CDA$ は相似なので、$AB : AC = BE : CD$　。これと、$BE = BD$ より、

$$AB : AC = BD : CD$$

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］

図 19 A の $\triangle ABD$ に正弦定理を適用すると、

$$\frac{BD}{\sin(m\angle BAD)} = \frac{AB}{\sin(m\angle BDA)}$$

また、$\triangle ACD$ にも正弦定理を適用すると、

$$\frac{CD}{\sin(m\angle CAD)} = \frac{AC}{\sin(m\angle CDA)}$$

今、$m\angle BAD = m\angle CAD$、および、$m\angle BDA = \pi - m\angle CDA$ より $\sin(m\angle BDA) = \sin(m\angle CDA)$ となることを用いると、

$$AB : BD = \sin(m\angle BDA) : \sin(m\angle BAD) = \sin(m\angle CDA) : \sin(m\angle CAD) = AC : CD$$

この最左辺と最右辺を用いて並べ替えると、

$$AB : AC = BD : CD$$

これは正に求めるべき関係式である。

［ 証明２終わり ］

6　基本図形の面積・体積の導出

江澤　潔　[手書き：2020/12/05-06; 電子文書化：2021/02/26-03/01]

ここで色々な基本図形の面積や体積の求め方をおさらいしておこう。（ただし、簡単すぎる奴は割愛。）

6.1　正多角形の面積

定理 6.1　一片の長さが l の正 n 角形の面積は

$$A_{\text{正 } n \text{ 角形}}(l) = \frac{n\, l^2}{4\tan(\pi/n)} \tag{36}$$

［ 導出法 ］

図 20 の様に、正 n 角形に内接した円を描き、その半径を R、中心を O とする。正 n 角形は、 O を囲んだ n 個の二等辺三角形に分割され、その各々は、例えば $\triangle OA_1A_2$

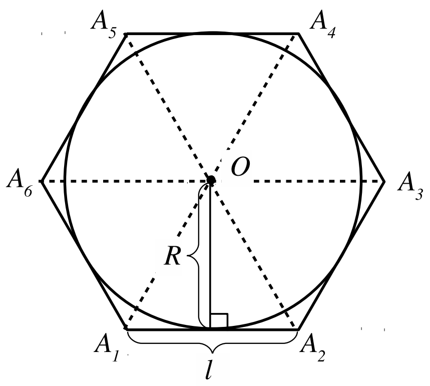


図 20　**正 n 角形の面積の導出。**ここでは例として $n=6$ の場合を示した。

の様に、正 n 角形の一辺と中心 O から引いた二つの半径から構成される。図 20 より、$\triangle OA_1A_2$ の高さは R、$m\angle A_1OA_2 = 2\pi/n$ なので、一辺（例えば $\overline{A_1A_2}$）の長さ $(=l)$ は

$$l = 2R\tan\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

即ち、

$$R = \frac{l}{2\tan(\pi/n)}$$

よって、$\triangle OA_1A_2$ の面積は、

$$A[\triangle OA_1A_2] = \frac{1}{2}R\,l = \frac{l^2}{4\tan(\pi/n)} \quad (= R^2\tan(\pi/n))$$

正 n 角形の面積はその n 倍なので、

$$A_{\text{正 } n \text{ 角形}}(l) = n\times A[\triangle OA_1A_2] = \frac{n\,l^2}{4\tan(\pi/n)} \quad (= n\ R^2\tan(\pi/n))$$

[**導出法終わり**]

[**注：**上の最後の式で、（R を固定して）n が無限大の極限では $A_{\text{正 } n \text{ 角形}}(l) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi R^2$ となり、円の面積に近付く。]

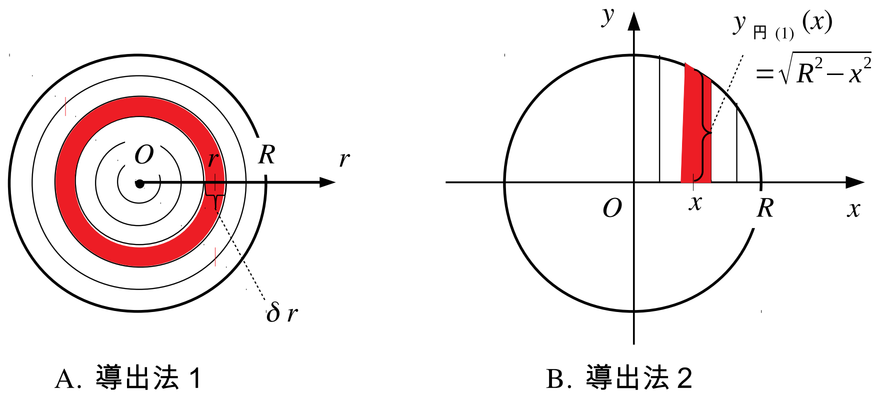


図 21　**円の面積の導出。A.** 導出法 1 。**B.** 導出法 2 。どちらのパネルでも、足し合わされる微小面積のうちの一つを赤い領域で例示した。

6.2　円の面積

定理 6.2　半径 R の円の面積は πR^2 。
ただしここで、円周率 π の定義は：

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\text{円の周りの長さ})}{(\text{円の直径})}$$

とする。

[導出法 1]
図 21 A の様に、半径 R の円をバウムクーヘンの様に半径 r（$< R$）の同心円によって多くの薄い輪に切り分けると、円の面積は、それら薄い輪の面積の和で表される。そして、半径 r （$0 < r < R$）、厚さ δr の薄い輪の面積は $2\pi r\delta r$ で近似できる。従って、半径 R の円の面積は：

$$A_{\text{円}}(R) = \int_0^R 2\pi r dr = \pi r^2|_{r=0}^{r=R} = \pi R^2 - \pi\ 0^2 = \pi R^2$$

[導出法 1 終わり]

[注：このやり方を少し変形すれば、半径 R で中心角 θ（ラジアン）の扇型の面積が $\frac{1}{2}R^2\theta$

であることも導出できる。]

[導出法２]

図 21 B の様に、デカルト座標、(x, y)、を用いると、原点 O を中心とした半径 R の円は、$x^2 + y^2 = R^2$ で表される。これより、第一象限（$x > 0$ および $y > 0$）にある四分円上では、$y = y_{円（1）}(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ となるので、その面積は：

$$A_{四分円}(R) = \int_0^R y_{円（1）}(x)dx = \int_0^R dx\sqrt{R^2 - x^2}$$

ここで、$x = R\cos\theta$ と置くと、$\frac{dx}{d\theta} = -R\sin\theta$、$x = 0$ のとき $\theta = \pi/2$、$x = R$ のとき $\theta = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
A_{四分円}(R) &= \int_0^R dx\sqrt{R^2 - x^2} = \int_{\pi/2}^0 d\theta(-R\sin\theta)\sqrt{R^2 - (R\cos\theta)^2} \\
&= -\int_{\pi/2}^0 d\theta\ R^2\sin^2\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{R^2}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\
&= \frac{R^2}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \frac{R^2}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}R^2
\end{aligned}$$

これより、

$$A_{円}(R) = 4 \times A_{四分円}(R) = 4 \times \frac{\pi}{4}R^2 = \pi R^2$$

[導出法２終わり]

6.3 錐体の体積と面積

定理 6.3（錐体の体積） 図 22 A の様に、底面積が S 底面から頂点 O までの高さが h の錐体の体積は：

$$V_{錐体}(S, h) = \frac{1}{3}S\ h \tag{37}$$

[導出法]

図 22 B の様に、頂点 O から底面へ引いた垂線と底面の交点を C とし、その方向に z 座標を設ける。（頂点 O で $z = 0$ とする。）そして、 区間、$0 \leq z \leq h$ を細分し、底面に

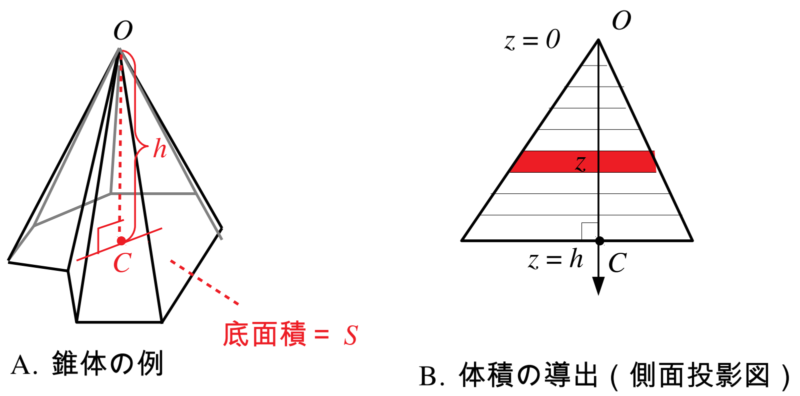


図 22　**錐体の体積の導出。A.** 錐体の例。赤字は、理解を助ける為の補助線および交点（C）。**B.** 体積の導出（側面投影図）。パネル B では、足し合わされる微小体積（スライス）の一つを赤で例示した。

平行な平面をとって錐体をスライスする。すると、これらの平面による錐体の断面は底面と相似である*18 。従って、座標 z のところでの断面は、底面との相似比が $z : h$ であり、その断面の面積は $(z/h)^2 S$ となる。よって、座標 z 付近での厚さ δz のスライスの体積は、近似的に $(z/h)^2 S\ \delta z$ なので、錐体全体の体積は：

$$\begin{aligned} V_{\text{錐体}}(S,h) &= \int_0^h dz \left(\frac{z}{h}\right)^2 S \\ &= \frac{z^3}{3h^2}\ S\Big|_{z=0}^{z=h} = \frac{h^3}{3h^2}\ S \\ &= \frac{1}{3} S\ h \end{aligned}$$

[導出法終わり]

[余談] 我が家では、私が小学生の頃、この錐体の体積に付く因子、1/3、について、「何故 1/2 ではないのだ？」「1/4 のハズだ」等という、(「きちっと導出しよう」という科学的動機に欠けた）素人的な論争になった事があったが、結局納得のいく説明もなく、私の心の中にモヤモヤが残った。このモヤモヤがようやく晴れたのは、私が高校に入って微積分を学んでからであった。

*18　これは、垂線 $\overline{OC}$ と、交点 C を通る底面上の直線、および、錐体の側面上の頂点 O から引いた直線から成る直角三角形（の集合）を利用すれば証明できるハズである。

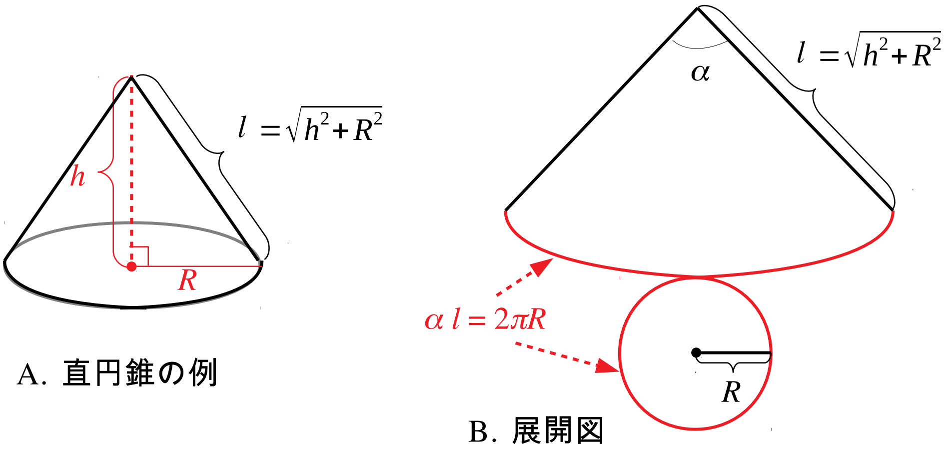


図 23　**直円錐の側面積。A.** 直円錐の例。**B.** 展開図。

定理 6.4（直円錐の側面積）　図 23 A の様な、底面の半径が R、頂点 O までの高さが h の直円錐の側面積は、$\pi R\sqrt{h^2+R^2}$

[導出法]

図 23 B の様に展開図を書くと、側面部は扇型となり、その半径は $l=\sqrt{h^2+R^2}$（$\because$ 図 23 A でピタゴラスの定理を適用 ）。扇型の中心角を α とすると、弧の長さより、$\alpha\, l = 2\pi R$ となる。従って、側面積は：

$$\frac{1}{2}\alpha\, l^2 = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi R}{l}\times l^2 = \pi R\, l = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$$

[導出法終わり]

定理 6.5（正多角錐の側面積）　図 24 A の様に、頂点 が底面の中心からの垂線上にある、底面の一辺が l、高さが h の正 n 角錐の側面積は、

$$\frac{1}{2}n\, l\sqrt{\left(\frac{l}{2\tan(\pi/n)}\right)^2+h^2}$$

[導出法]

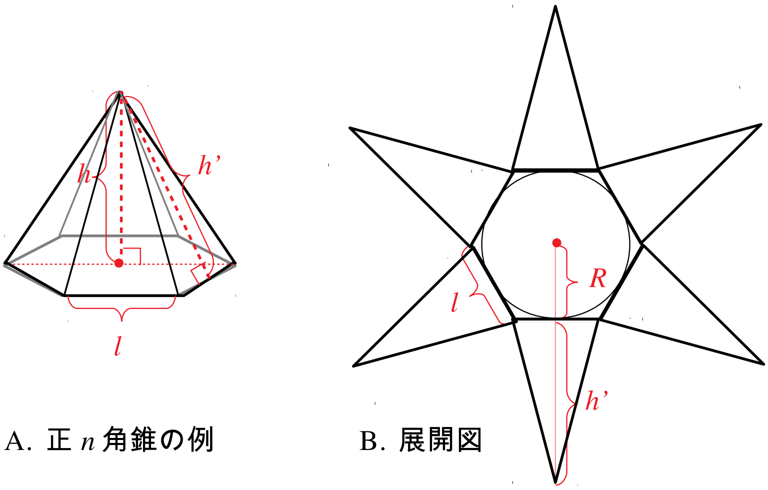


図 24　正 n 角錐の側面積。**A.** 正 n 角錐の例。ここでは例として $n=6$ としている。**B.** 展開図。

図 24 B の様に展開図を書くと内接円の半径 R は（定理 6.1 と同様に）

$$R = \frac{l}{2\tan(\pi/n)}$$

側面は n 個の二等辺三角形から成るが、その各々の底辺は l、高さは（ピタゴラスの定理より）$h' = \sqrt{R^2+h^2}$ となる。従って、側面積は、

$$n \times \frac{1}{2} l\ h' = \frac{1}{2} n\ l\ \sqrt{R^2+h^2} = \frac{1}{2} n\ l\ \sqrt{\left(\frac{l}{2\tan(\pi/n)}\right)^2 + h^2}$$

［ 導出法終わり ］

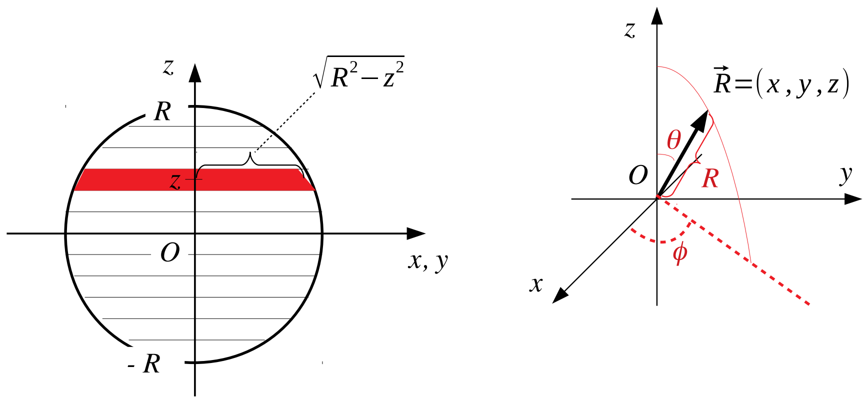
6.4　球体の体積と面積

定理 6.6（球体の体積）　半径 R の球体の体積は、

$$V_{\text{球体}}(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

［ 導出法 1 ］

図 25 A の様にデカルト座標、(x, y, z)、を取ると、原点 O を中心とし、半径が R の球体の式は、$x^2+y^2+z^2 = R^2$ である。この球体を様々な z の値 $(-R < z < R)$ を取る、z 軸に垂直な平面でスライスする。すると、この球体の z における断面は、$x^2+y^2 = R^2 - z^2$ なので、半径 $\sqrt{R^2-z^2}$ の円となり、その面積は $\pi(R^2-z^2)$ となる。



A. 導出法 1
（側面投影図）

B. 導出法 2（極座標）

図 25　**球体の体積の導出。A.** 導出法 1（側面投影図）。**B.** 導出法 2（極座標）。

よって、z 付近で厚さが δz のスライスの体積は、近似的に、$\pi(R^2 - z^2)\ \delta z$ で与えられるので、球体全体の体積は：

$$V_{球体}(R) = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \pi\left(Rz - \frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{z=-R}^{z=R} = \pi\left\{\frac{2}{3}R^3 - \left(-\frac{2}{3}R^3\right)\right\} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

［導出法 1 終わり］

［導出法 2］

図 25 B の様に極座標、(r, θ, ϕ)（$0 \le r$、$0 \le \theta \le \pi$、$0 \le \phi < 2\pi$）を用いると、

$$\vec{R} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$

となり、ヤコビアン（Jacobian）は、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\vec{R} \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\vec{R} \\ \frac{\partial}{\partial \phi}\vec{R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

ここで、$|M|$ は、行列 M の行列式を表す。この最右辺の行列は、実は直行行列となって

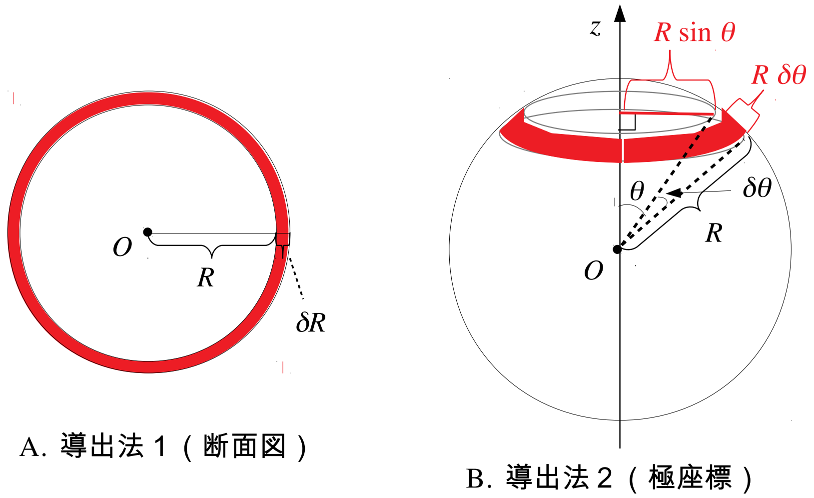


図 26　**球面の面積の導出。A.** 導出法１（断面図）。**B.** 導出法２（極座標）。

おり、行列式は 1 であるので、結局、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2 \sin\theta$$

となる。これと、図 25 A の球体は極座標の領域、$r \le R$ 、 $0 \le \theta \le \pi$ 、$0 \le \phi < 2\pi$ 、で表されることを用いると、その体積は以下の様に計算できる：

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \;\; r^2 \sin\theta \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R} \times [-\cos\theta]|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \times 2\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

（注：この式変形中の第一等式の右辺の $|\cdots|$ は単に $\cdots$ の絶対値を表す。）

［導出法２終わり］

定理 6.7（球面の面積）　半径 R の球面の面積は、

$$A_{球面}(R) = 4\pi R^2$$

［導出法１］

半径 $R+\delta R$ の球体の体積は、$V_{\text{球体}}(R+\delta R)=\frac{4}{3}\pi(R+\delta R)^3$ となり、それと半径 R の球体の体積との差は図 26 A で、薄い「殻」部分（断面が赤色）の体積なので、概ね、$A_{\text{球面}}(R)\times\delta R$ となることから、

$$A_{\text{球面}}(R)=\frac{d}{dR}V_{\text{球体}}(R)=\frac{d}{dR}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=4\pi R^2$$

［ 導出法１終わり ］

［ 導出法２ ］

極座標を用いて、図 26 B の様に θ 付近の幅 $\delta\theta$ の帯の面積を考えると、それは、直径 $R\sin\theta$ の円と（それに直交する）$R\delta\theta$ の「幅」部分（表側が赤色）から成るので、$2\pi R\sin\theta\times R\delta\theta=2\pi R^2\sin\theta\delta\theta$ 。従って、全体では、

$$A_{\text{球面}}(R)=\int_0^{\pi}2\pi R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2\left[-\cos\theta\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}=4\pi R^2$$

［ 導出法２終わり ］

6.5　n 次元超球体

定理 6.8（n 次元超球体の「超体積」）　半径 R の n 次元超球体の「超体積」は、

$$V_{\text{超球体}}^{(n)}(R)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$

ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数（定義および性質は補遺 D を参照）。

［ 導出法 ］

n 次元ユークリッド空間での極座標、$(R,\theta_1,...,\theta_{n-2},\phi)$ $(0\le R$、$0\le\theta_1,...,\theta_{n-2}\le\pi$、$0\le\phi<2\pi)$ を次の様に設定する：

$$\vec{R}=(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{array}{l}(r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\phi,\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\phi,\\ \quad r\cos\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2},\ ...,\ r\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2},\ r\cos\theta_{n-2})\end{array}$$

そして、定理 6.6 の [導出法２] と同様にして、

$$\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(r,\theta_1,..,\theta_{n-2},\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\vec{R} \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}\vec{R} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\vec{R} \\ \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{R} \end{vmatrix}$$

$$= (r\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2})\times(r\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2})\times\cdots\times(r\sin\theta_{n-2})\times r\times(r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2})\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_{\theta_1} \\ \vdots \\ \vec{e}_{\theta_{n-2}} \\ \vec{e}_\phi \end{vmatrix}$$

ここで、$\vec{e}_r$ 、$\vec{e}_{\theta_1}$ 、...、$\vec{e}_{\theta_{n-2}}$、$\vec{e}_\phi$ は、それぞれ極座標 r 、θ_1 、...、θ_{n-2} 、ϕ が増す方向の単位ベクトルである[*19]。今の場合。これら単位ベクトルは正規直交系を構成するので、それらを並べた行列は、行列式が ± 1 となる。従って、

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(r,\theta_1,..,\theta_{n-2},\phi)}\right|$$
$$= (r\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2})\times(r\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2})\times\cdots\times(r\sin\theta_{n-2})\times r\times(r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2})$$
$$= r^{n-1}\times\sin\theta_1\times(\sin\theta_2)^2\times\cdots\times(\sin\theta_{n-2})^{n-2}$$

従って、n 次元超球体の「超体積」は、以下の様に計算できる：

$$\begin{aligned} V^{(n)}_{\text{超球体}}(R) &= \int_0^R dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta_1\cdots\int_0^\pi d\theta_{n-2}\left|\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(r,\theta_1,..,\theta_{n-2},\phi)}\right| \\ &= \int_0^R r^{n-1}dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1\cdots\int_0^\pi(\sin\theta_{n-2})^{n-2}d\theta_{n-2} \\ &= \frac{R^n}{n}\times 2\pi\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_{n-2} \end{aligned} \tag{38}$$

---

*19 具体的には：

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\phi, \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\phi, ..., \cos\theta_{n-2}) \quad , \\ \vec{e}_{\theta_1} &= (\cos\theta_1\cos\phi, \cos\theta_1\sin\phi, -\sin\theta_1, 0, ..., 0) \quad , \\ &\vdots \\ \vec{e}_{\theta_{n-2}} &= (\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\cos\phi, \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\sin\phi, ..., \cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}, -\sin\theta_{n-2}) \quad , \\ \vec{e}_\phi &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

ただしここで、$I_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi (\sin\theta)^k d\theta$ と置いた。

この I_k は次の様にして（２通りの方法で）求められる。まず、$t = \cos\theta$ と置くと、$\frac{dt}{d\theta} = -\sin\theta$ および $\sin\theta = (1-t^2)^{1/2}$ なので、

$$I_k = \int_1^{-1} (-dt)(1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} = \int_{-1}^{1} dt(1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} = 2\int_0^1 dt(1-t^2)^{\frac{k-1}{2}}$$

（解法１）$p = t^2$ と置くと、$t = p^{1/2}$ および $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{2}p^{-1/2}$ なので、

$$\begin{aligned} I_k &= 2\int_0^1 dt(1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} = 2\int_0^1 dp(1-p)^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{2}p^{-1/2} \\ &= \int_0^1 (1-p)^{\frac{k-1}{2}} p^{-1/2} dp = B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \end{aligned}$$

ここで、$\Gamma(x)$ と $B(x,y)$ はそれぞれガンマ関数とベータ関数と呼ばれ、それらの定義や主な性質は 補遺 D にまとめてある。

（解法２）$s = (1+t)/2$ と置くと、$1-s = (1-t)/2$ であるので、

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{-1}^1 dt(1-t^2)^{\frac{k-1}{2}} = \int_0^1 2ds\left[2s\times 2(1-s)\right]^{\frac{k-1}{2}} \\ &= 2^k \int_0^1 s^{\frac{k-1}{2}}(1-s)^{\frac{k-1}{2}} = 2^k B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) = 2^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)^2}{\Gamma(k+1)} \end{aligned}$$

I_k に関するこれら二つの解は、見た目は異なるが、同等である[*20]。そこで、（解法１）の解、即ち、

$$I_k == \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

[*20] （解１）＝（解２）の証明は、以下の関係式を示すことに帰着する：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma(k+1) = 2^k\times\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

補遺 D より、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 、$\Gamma(k+1) = k!$、そして、

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{k-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} & (k=2m) \\ \left(\frac{k-1}{2}\right)! & (k=2m+1) \end{cases}$$

および

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}\right)! & (k=2m) \\ \frac{k}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} & (k=2m+1) \end{cases}$$

これらを見比べれば、上記の関係式が成り立つことが分かる。

を式（38）に代入すると、

$$V_{超球体}^{(n)}(R)=\frac{R^n}{n}\times 2\pi\times(\sqrt{\pi})^{n-2}\times\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)}\times\cdots\times\frac{\Gamma\left(\frac{n-2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}$$
$$=\frac{R^n}{n}\times 2\pi^{n/2}\times\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}=\frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$

［ 導出法終わり ］

実際、例えば、$n=2$ の時は 2 次元の円の面積に相当し、

$$V_{超球体}^{(2)}(R)=\frac{\pi^{2/2}}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)}R^2=\frac{\pi}{\Gamma(2)(=1)}R^2=\pi R^2$$

又、$n=3$ の時は、三次元の球体の体積に相当し、

$$V_{超球体}^{(3)}(R)=\frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}R^3=\frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}R^3=\frac{4}{3}\pi R^3$$

よって、どちらの場合も我々のよく知った公式に帰着する。

定理 6.9（n 次元超球体の「超面積」） 半径 R の n 次元超球体の「超面積」は、

$$A_{超球体}^{(n)}(R)=2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}$$

［ 導出法 ］

定理 6.7 の ［ 導出法 1 ］と同様にして、

$$A_{超球体}^{(n)}(R)=\frac{d}{dR}V_{超球体}^{(n)}(R)$$

［ 導出法終わり ］

［ 注：］ 補遺 E では、これを違う（もっと簡単な）やり方で導出する。

7 一般化されたストークスの定理

江澤　潔　［手書き：2020/12/07-10; 電子文書化：2021/03/01-07］

「理論物理学における普遍的でかつ重要なツールを３つ挙げよ」と問われたら、私ならば

１、　変分原理

２、　次元解析

３、　一般化されたストークス（Stokes）の定理

と答えるであろう。

変分原理 の重要さは説明するまでもなかろう。実際、（古典力学における）ニュートン（Newton）の運動方程式、（電磁気学における）マックスウェル（Maxwell）の方程式（の半分）、（一般相対性理論における）アインシュタイン（Einstein）方程式、（量子力学における）シュレディンガー（Schrödinger）方程式、はどれも、適当な作用（汎）関数に変分原理を適用することにより導き出される。そしてそれは、更に基本的な理論、即ち、量子力学もしくは場の量子論、の（ファインマン（Feynman）による）経路積分を用いた表現によって裏打ちされている。また、熱力学の第一法則（つまりエネルギー保存則）から導ける数々の数式も、ある種、変分原理の様なものであり、それは統計力学の分配関数等の経路積分的表現により裏打ちされる。更には、幾何光学における光の経路を求める際にも変分原理が用いられるが、その土台には波動光学におけるホイヘンス（Huygens）の原理がある。つまり、物理学におけるほとんど全ての基本方程式は、（更に基礎となる量子論や波動光学に裏打ちされた）変分原理から導けるのだ。

次元解析 は、物理学における普遍定数、[例えば、真空の光速度 c（= 約 $3 \times 10^8 m/s$)、プランク（Planck）定数 $\hbar$（=（忘れた）$kg \cdot m^2/s$)、ボルツマン（Boltzmann）定数 k_B（$= 1.38 \times 10^{-23} kg \cdot m^2/(s^2 \cdot K)$ ）、素電荷 e（$= 1.6 \times 10^{-19}$ クーロン（Coulomb））、重力定数 G（=（忘れた）$m^3/(kg \cdot s^2)$)、等々]、および扱っている系に特徴的なスケール（例えば長さや質量等）から、その系に典型的な力、速度、運動量やエネルギー等のスケール（例えば水素原子の半径や吸光スペクトル等の大雑把な値等）を概算する方法である。その様なスケールは普通、方程式を解く際に抽出できるものであり、方程式の解の細々とした部分をはしょれば、大抵、そのスケールを用いて系の振る舞いは大雑把に記述できるものであるから、この次元解析で大体の見当はつけられる。もしも、実験などによる観測値が次元解析による見積もり値を大きく外れた場合（例えば何桁も大きかったり小さかったりした場合)、そこにはこれまでに考えていなかった「何か新しい”もの”」が関わっている、即ち、「新しい物理」に出くわした可能性が出てくる*21。又、次元解析等を

*21 例えば、原子核中で働く「強い力」と「弱い力」は、当時は唯一知られていたミクロの理論、量子電磁力学（QED)、から概算した値よりも相互作用が「強い」場合と「弱い」場合にそれぞれ対応すると思われる。

用いて測定する物理量を常に大まかに見積もる癖をつけておけば、（悪い意味で）常識はずれな「トンデモ理論」を提唱してしまうリスクも大幅に減らせる。こういった意味において、次元解析は、単純で素朴ながらも非常に強力かつ普遍的な物理のツールに名を連ねる資格がある、、、と私は思う。

３番目に挙げた**「一般化されたストークス（Stokes）の定理」**という名を聞いたことのある人々はひょっとしたらそれ程多くはないかも知れない。しかしながら、物理学をなりわいとしている人間であれば、そのほとんどすべてがその特殊ケースのお世話になったことが少なくとも一度はあるハズである、というくらい普遍的な定理である。それというのも、この「一般化されたストークスの定理」は、その特殊ケースとして、以下のものを含むからである：

（１）　スカラー場（例えば ϕ）の勾配（gradient）、grad $\phi = \vec{\bigtriangledown}\phi$ 、[*22] に関する、多次元版の微積分の基本定理；

（２）　ベクトル場（例えば $\vec{A}$）の発散（divergence）、div $\vec{A} = \vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{A}$、に関するガウス（Gauss）の定理；

（３）　ベクトル場の回転（rotation）、rot $\vec{A} = \vec{\bigtriangledown} \times \vec{A}$、に関する（狭義の）ストークスの定理；

（４）　二次元ベクトル場に関するグリーン（Green）の定理；

（５）　複素平面上の関数に関する複素関数の基本定理と留数定理。

実際、物理学の基本方程式のほとんど全ては、これらのうちの少なくとも一つを構成要素としている。そしてまた、「一般化されたストークスの定理」自体は、座標系の取り方にも依らず、ホモロジーやコホモロジーといった位相幾何学（トポロジー）における重要な概念とも直結しているので、（超弦理論等を含む）やや数学よりの理論物理学でも重要な役割を果たしている（ハズである）。

「一般化されたストークスの定理」自身を証明するには、かなりの数学的な準備を要するのでここでは割愛する。（興味ある方々は自分で調べて欲しい。）その代わりに、（一応形式的に）定理を紹介した後で、その幾つかの特殊例のいささか直観的な導出法を説明する。

[*22] LaTeX では、（３次元）ベクトル型微分演算子、ナブラ（nabla）$\stackrel{\text{def}}{=} (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を表現するための記号、∇、が利用可能である。しかしながら、この学習ノートでは、ベクトルを文字の上の矢印で表現しているので、首尾一貫させるため、我々はナブラ演算子を $\vec{\bigtriangledown}$ と表記することとする。

定理 7.1（一般化されたストークスの定理）　D 次元空間（多様体）中の n 次元の閉じた領域 R （注：半径ではない！！）があり、その（$n-1$ 次元の）境界を ∂R と表記する。また、その D 次元空間上で定義された $(n-1)$ 次の微分形式を $\mathbf{f}$、その外微分を $d\mathbf{f}$ とする。（$d\mathbf{f}$ は n 次の微分形式。）これらの間には次の関係が成立する[*23]：

$$\int_R d\mathbf{f} = \int_{\partial R} \mathbf{f}$$

ここでは、この証明は与えないし、如何にして特殊例（１）〜（５）がこの定理に含まれるかも示さない。代わりに、特殊例の（主にベクトル場を用いた）具体的な形と、その直観的証明（導出）を与える。

三次元空間の場合、デカルト座標、$(x,\ y,\ z)$、を用いて、スカラー場 ϕ とベクトル場 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ に対し、

- 勾配（gradient）は、 $\mathrm{grad}\ \phi = \vec{\bigtriangledown}\phi \overset{\mathrm{def}}{=} (\frac{\partial}{\partial x}\phi, \frac{\partial}{\partial y}\phi, \frac{\partial}{\partial z}\phi)$；
- 発散（divergence）は、 $\mathrm{div}\ \vec{A} = \vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$；
- 回転（rotation）は、$\mathrm{rot}\ \vec{A} = \vec{\bigtriangledown}\times\vec{A} \overset{\mathrm{def}}{=} (\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y, \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z, \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x)$；

である事は用いるので、ここに記しておく。[*24]

7.1　特殊ケースとその証明／導出

定理 7.2（３次元版の微積分の基本定理）　三次元空間上での二点、$\vec{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ と $\vec{R}_2 = (x_2, y_2, z_2)$、を結ぶ任意の線を $l(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ とする（図 27 A）と、任意の三次元スカラー場 $\phi(\vec{R})$ に対し、次式が成立する：

$$\int_{l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)} d\vec{s}\cdot\vec{\bigtriangledown}\phi(\vec{R}) = \phi(\vec{R}_2) - \phi(\vec{R}_1) \quad , \tag{39}$$

ここで、$d\vec{s} = (dX, dY, dZ)$ は線 $l(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ に沿った線素である。
[注： これは容易に D 次元に拡張可能である。]

---

*23　ここに登場する積分は一般に（閉じた領域上の）多重積分であるが、単一の積分記号を用いて表記した。多重積分であることは、積分領域を積分記号の右下に明記することにより了解されたものとする。

*24　ここで、ベクトル演算子、$\vec{\bigtriangledown} \overset{\mathrm{def}}{=} (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$、はナブラ（nabla）と呼ぶ。脚注 *22 も参照。

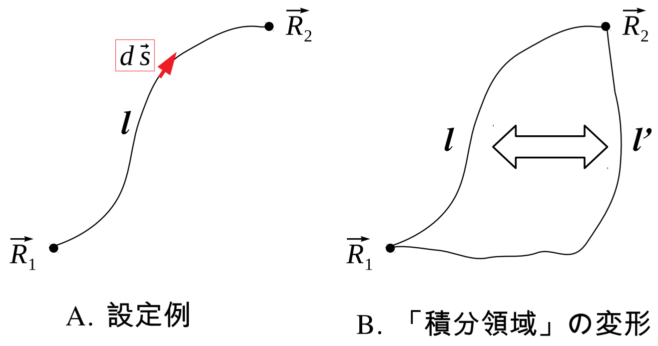


図 27　３次元版の微積分の基本定理。**A.** 設定の例。線素 $d\vec{s}$ の例は赤で示している。**B.** 特異線が阻まない限り、「積分領域」$l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$ は自由に $l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$ に変形できる。いずれのパネルも、線 $l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$（もしくは $l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$）は l（もしくは l'）と略記した。

[証明]

任意の三次元スカラー場 $\phi(\vec{R})$ に対し、常に、

$$\begin{aligned}\vec{\triangledown}\times\vec{\triangledown}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\phi\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\phi\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\right)\right)\\ &= (0,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

が成立するので、後述する（狭義の）ストークスの定理により、二点、$\vec{R}_1=(x_1,y_1,z_1)$ と $\vec{R}_2=(x_2,y_2,z_2)$、を結ぶ二つの線、$l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$ と $l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$、に対して、

$$\int_{l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)} d\vec{s}\cdot\vec{\triangledown}\phi(\vec{R})=\int_{l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)} d\vec{s}\cdot\vec{\triangledown}\phi(\vec{R})$$

が、この二線の間を 特異点（正確には「特異線」）が阻まない限り、成立する（図 27 B）。よって、$l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)$ として（注：変化する座標は下線でマークする）、

(i)　$(\underline{x_1},y_1,z_1)$ から $(\underline{x_2},y_1,z_1)$ までの直線（線分）$(d\vec{s}=(dx,0,0))$ ；
(ii)　$(x_2,\underline{y_1},z_1)$ から $(x_2,\underline{y_2},z_1)$ までの直線（線分）$(d\vec{s}=(0,dy,0))$ ；
(iii)　$(x_2,y_2,\underline{z_1})$ から $(x_2,y_2,\underline{z_2})$ までの直線（線分）$(d\vec{s}=(0,0,dz))$

から成る折れ線を選ぶと、

$$\int_{l(\vec{R}_1,\vec{R}_2)} d\vec{s}\cdot\vec{\triangledown}\phi(\vec{R})=\int_{l'(\vec{R}_1,\vec{R}_2)} d\vec{s}\cdot\vec{\triangledown}\phi(\vec{R})$$

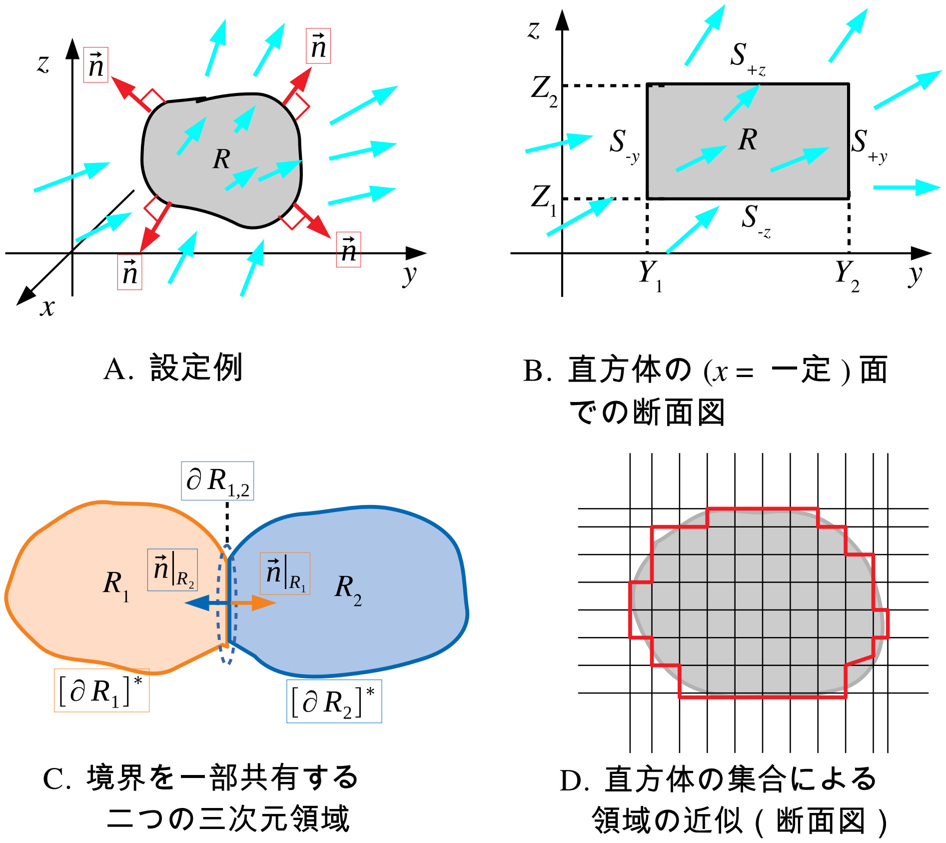


図 28　三次元版ガウスの定理とその直観的導出。**A.** 設定例。三次元領域 R は灰色の領域で、その法線（$\vec{n}$）の例は赤い矢印で、ベクトル場（$\vec{A}$）はシアンの矢印で示した。**B.** R が直方体の時（z =(一定) 平面での断面図)。（z 軸は紙面に垂直上むき。）**C.** 二つの領域、R_1（オレンジ） と R_2（青）、が境界を一部共有する時。**D.** 直方体の集合による一般の領域（灰色）の近似（z =(一定) 平面での断面図)。赤い太線が、近似領域の境界。

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^{y_2} dy\ \frac{\partial}{\partial y}\phi(x_2, y, z_1) + \int_{z_1}^{z_2} dz\ \frac{\partial}{\partial z}\phi(x_2, y_2, z) \\
&= \{\phi(x_2, y_1, z_1) - \phi(x_1, y_1, z_1)\} + \{\phi(x_2, y_2, z_1) - \phi(x_2, y_1, z_1)\} \\
&\qquad\qquad + \{\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_2, y_2, z_1)\} \\
&= \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \quad \left(= \phi(\vec{R}_2) - \phi(\vec{R}_1)\right)
\end{aligned}
$$

もしも幾つかの特異線が $l(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ の近傍にある時は、それら特異線を避ける様に $l(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ を幾つかの小区間に細分して、各小区間ごとに上記の証明を施せば良い。

[証明終わり]

定理 7.3（3 次元版のガウスの定理）　（図 28 A の様に）三次元空間上で定義されたベク

トル場 $\vec{A}(\vec{R})$、三次元の領域を R、その境界を ∂R とすると、

$$\int\int\int_R dxdydz\ \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}(\vec{R})=\int\int_{\partial R} dS\ \vec{n}\cdot\vec{A}(\vec{R}) \tag{40}$$

ここで、$\vec{R}=(x,\ y,\ z)$、dS は ∂R の面素、$\vec{n}$ は ∂R に対する外向き法線。

[注： これも容易に D 次元に拡張可能である*25 。]

[直観的導出]

先ず、図 28 B の様に、三次元領域 R として、

$$\{(x,\ y,\ z)\quad|\quad X_1\le x\le X_2,\ Y_1\le y\le Y_2,\ Z_1\le z\le Z_2\ \}$$

となる直方体を取る。すると、その境界 ∂R は、次の 6 面の長方形から成る：

$$\left[\begin{array}{lcll} S_{+x} & : & x=X_2, & (\text{y, zの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(+1,\ 0,\ 0)\\ S_{-x} & : & x=X_1, & (\text{y, zの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(-1,\ 0,\ 0)\\ S_{+y} & : & y=Y_2, & (\text{x, zの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(0,\ +1,\ 0)\\ S_{-y} & : & y=Y_1, & (\text{x, zの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(0,\ -1,\ 0)\\ S_{+z} & : & z=Z_2, & (\text{x, yの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(0,\ 0,\ +1)\\ S_{-z} & : & z=Z_1, & (\text{x, yの定義域はRと同じ}),\quad \vec{n}=(0,\ 0,\ -1) \end{array}\right.$$

これより、

$$\begin{aligned} &\int\int_{\partial R} dS\ \vec{n}\cdot\vec{A}(\vec{R})\\ =&\int\int_{S_{+x}}|dydz|A_x+\int\int_{S_{-x}}|dydz|(-A_x)+\int\int_{S_{+y}}|dzdx|A_y+\int\int_{S_{-y}}|dzdx|(-A_y)\\ &\qquad+\int\int_{S_{+z}}|dxdy|A_z+\int\int_{S_{-z}}|dxdy|(-A_z)\\ =&\int_{Y_1}^{Y_2}dy\int_{Z_1}^{Z_2}dz\,\{A_x(X_2,y,z)-A_z(X_1,y,z)\}+\int_{X_1}^{X_2}dx\int_{Z_1}^{Z_2}dz\,\{A_y(x,Y_2,z)-A_y(x,Y_1,z)\}\\ &\qquad+\int_{X_1}^{X_2}dx\int_{Y_1}^{Y_2}dy\,\{A_z(x,y,Z_2)-A_z(x,y,Z_1)\}\quad 。 \end{aligned} \tag{41}$$

上式で、（普通の（一次元の）微積分の基本定理を適用して）

$$\left\{\begin{array}{l} A_x(X_2,y,z)-A_z(X_1,y,z)=\int_{X_1}^{X_2}dx\ \frac{\partial}{\partial x}A_x(x,y,z)\quad ,\\ A_y(x,Y_2,z)-A_y(x,Y_1,z)=\int_{Y_1}^{Y_2}dy\ \frac{\partial}{\partial y}A_y(x,y,z)\quad ,\\ A_z(x,y,Z_2)-A_z(x,y,Z_1)=\int_{Z_1}^{Z_2}dz\ \frac{\partial}{\partial z}A_z(x,y,z) \end{array}\right.$$

*25 一般化されたストークスの定理の文脈では、ここに登場するベクトル場 $\vec{A}(\vec{R})$ は、実は、$(D-1)$ 次の微分形式（あるいはその共役型）である。

となるので、これを式（41）に代入して、

$$\int\!\!\int_{\partial R} dS\ \vec{n}\cdot\vec{A}(\vec{R}) = \int_{X_1}^{X_2} dx \int_{Y_1}^{Y_2} dy \int_{Z_1}^{Z_2} dz \left\{ \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \right\}(x,y,z)$$
$$= \int\!\!\int\!\!\int_R dxdydz\ \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}(\vec{R}) \quad 、 \tag{42}$$

即ち、R が直方体の時の式（40）は、厳密に成立する。

次に、図 28 C の様に、「隣り合った」三次元領域 R_1 と R_2 を考え、その共通の 境界を$\partial R_{1,2}$と表すと、$\partial R_{1,2}$ における R_1 からの外向き法線（$\vec{n}|_{R_1}$）と R_2 からの外向き法線（$\vec{n}|_{R_2}$ ）は、互いに逆向きであるので、$\partial R_{1,2}$ 上では、

$$\vec{n}\cdot\vec{A}|_{R_1} + \vec{n}\cdot\vec{A}|_{R_2} = 0 \tag{43}$$

となる。図 28 C より、（∂R_k のみの境界成分を $[\partial R_k]^*$ （$k=1,2$）と記すと）、

$$\begin{cases} \partial R_1 = [\partial R_1]^* + \partial R_{1,2} \\ \partial R_2 = [\partial R_2]^* + \partial R_{1,2} \end{cases} ,$$

であり、R_1 R_2 それぞれに定理が厳密に成立すると仮定すると、

$$\int\!\!\int\!\!\int_{R_k} \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A} = \int\!\!\int_{[\partial R_k]^*} \vec{n}\cdot\vec{A} + \int\!\!\int_{\partial R_{1,2}} \vec{n}\cdot\vec{A}|_{R_k} \quad (k=1,2)$$

より、R_1 と R_2 を合わせた「複合領域」、$R_1\cup R_2$、では、

$$\int\!\!\int\!\!\int_{R_1\cup R_2} \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A} = \int\!\!\int_{[\partial R_1]^*\cup[\partial R_2]^*} \vec{n}\cdot\vec{A} + \int\!\!\int_{\partial R_{1,2}} \left\{ \vec{n}\cdot\vec{A}|_{R_1} + \vec{n}\cdot\vec{A}|_{R_2} \right\}$$

ここで、式（43）を用いると、右辺の { } の中身は消えるので、

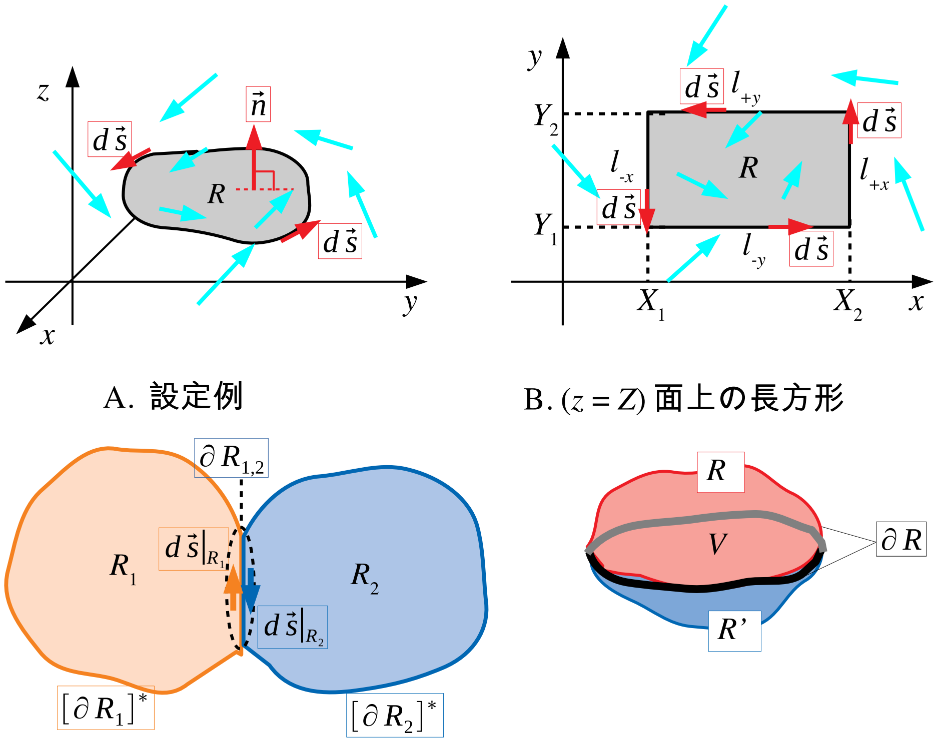
$$\int\!\!\int\!\!\int_{R_1\cup R_2} \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A} = \int\!\!\int_{[\partial R_1]^*\cup[\partial R_2]^*} \vec{n}\cdot\vec{A}$$

となる。図 28 C より、$R_1\cup R_2$ の境界は $[\partial R_1]^*\cup[\partial R_2]^*$ で与えられる、即ち、$\partial(R_1\cup R_2) = [\partial R_1]^*\cup[\partial R_2]^*$ となることが分かるので、上式はさらに変形できて、

$$\int\!\!\int\!\!\int_{R_1\cup R_2} \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A} = \int\!\!\int_{\partial(R_1\cup R_2)} \vec{n}\cdot\vec{A}$$

即ち、「複合領域」、$R_1\cup R_2$、に対しても定理が厳密に成立することが示せた。

ここで任意の三次元領域 R を考える。R を図 28 D の様にサイの目切りにして微小な直方体（もしくは立方体）の集合で近似すると、上記二つの結果から、その近似



A. 設定例　B. $(z = Z)$ 面上の長方形

C. 境界を一部共有する二つの二次元領域　D. 境界を完全に共有する二つの二次元領域

図 29　**狭義のストークスの定理とその直観的導出。A.** 設定例。二次元領域 R は灰色の領域で、その線素（$d\vec{s}$）の例および法線（$\vec{n}$）の例は赤い矢印で、ベクトル場（$\vec{A}$）はシアンの矢印で示した。**B.** 二次元領域 R が $z = Z$ 平面上の長方形の時。（z 軸（$= \vec{n}$）は紙面に垂直上向き。）**C.** 二つの二次元領域、R_1（オレンジ） と R_2（青）、が境界を一部共有する時。**D.** 境界（∂R）（黒と灰色の太線）を完全に共有する二つの二次元領域、R（赤） と R' （青）。R と R' によって囲まれた三次元領域を V と記した。

した領域に関しては定理が厳密に成立する。とりわけ、∂R 付近の直方体をどんどん細かくしていけば、少なくとも近似的には定理は成立し、微小直方体のサイズ $\longrightarrow 0$ の極限で定理が成り立つハズである。[*26]

[直観的導出終わり]

[*26] この場合の一つの懸念は、直方体の集合で近似された領域の境界は細かなギザギザ（デコボコ）からなる事である。これの懸念を払拭する一つの方法は、直角三角柱や直角三角錐をデコボコした表面のところに埋め込んで、境界をより滑らかに近似する事である。直角三角柱や直角三角錐における定理の証明は補遺 F で行われる。

定理 7.4（狭義のストークスの定理）　（図 29 A の様に）三次元空間上で定義されたベクトル場 $\vec{A}(\vec{R})$、二次元の閉じた領域を R、その境界を ∂R とすると、

$$\int\int_R dS\ \vec{n}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}(\vec{R})\right)=\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{R}) \tag{44}$$

ここで、$\vec{R}=(x,\ y,\ z)$、dS は ∂R の面素、$\vec{n}$ は R 上の（∂R に対して）右ねじ方向の法線、$d\vec{s}$ は ∂R の線素。
[**注：** これも D 次元に拡張可能であるが、その際、ベクトル場 $\vec{A}(\vec{R})$ は 1 次の微分形式、そして $\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}(\vec{R})$ はその外微分で置き換えられる 。]

[直観的導出]
先ず、二次元領域 R として、図 29 B の様に、平面 $z=Z$ 上の長方形：

$$\{(x,\ y,\ Z)\quad|\quad X_1\le x\le X_2,\ \ Y_1\le y\le Y_2\ \ \}$$

を考える。すると、$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ で、∂R は長方形の周囲で、4 つの線分：

$$\begin{cases} l_{+x} & : \quad x=X_2,\ Y_1\le y\le Y_2, \quad d\vec{s}=(0,+dy,0) \quad , \\ l_{-x} & : \quad x=X_1,\ Y_1\le y\le Y_2, \quad d\vec{s}=(0,\ -dy,\ 0) \quad , \\ l_{+y} & : \quad y=Y_2,\ X_1\le x\le X_2, \quad d\vec{s}=(-dx,\ 0,\ 0) \quad , \\ l_{-y} & : \quad y=Y_1,\ X_1\le x\le X_2, \quad d\vec{s}=(+dx,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

から成る（いずれも $z=Z$）。従って、

$$\begin{aligned}\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A} &= \int_{l_{+x}} d\vec{s}\cdot\vec{A}+\int_{l_{-x}} d\vec{s}\cdot\vec{A}+\int_{l_{+y}} d\vec{s}\cdot\vec{A}+\int_{l_{-y}} d\vec{s}\cdot\vec{A} \\ &= \int_{Y_1}^{Y_2} dy\ A_y(X_2,y,Z)+\int_{Y_1}^{Y_2} dy(-A_y(X_1,y,Z)) \\ &\qquad +\int_{X_1}^{X_2} dx(-A_x(x,Y_2,Z))+\int_{X_1}^{X_2} dx\ A_x(x,Y_1,Z) \\ &= \int_{Y_1}^{Y_2} dy\,[A_y(X_2,y,Z)-A_y(X_1,y,Z)]+\int_{X_1}^{X_2} dx\,[-A_x(x,Y_2,Z)+A_x(x,Y_1,Z)] \quad 。\end{aligned}$$

上式の [ ] 内のそれぞれに一次元の微積分の基本定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A} &= \int_{Y_1}^{Y_2} dy\left[\int_{X_1}^{X_2}\frac{\partial}{\partial x}A_y(x,y,Z)\right]+\int_{X_1}^{X_2} dx\left[-\int_{Y_1}^{Y_2}\frac{\partial}{\partial y}A_x(x,y,Z)\right] \\ &= \int_{X_1}^{X_2} dx\int_{Y_1}^{Y_2} dy\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)(x,y,Z) \end{aligned} \tag{45}$$

今、$\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$ なので、$\vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right) = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x$ 。よって、式（44)、即ち、

$$\oint_{\partial R} d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int\int_R dS\ \vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right)$$

が、$z = Z$ 上の長方形について厳密に成立する。

同様にすれば、それぞれ、$x = X$ や $y = Y$ 上の長方形についても厳密に成立することが示せる。

次に、図 29 C の様に、二つの接触した二次元面、R_1 と R_2、を考え、その共通の境界を $\partial R_{1,2}$ とすると、$\partial R_{1,2}$ 上での R_1 に関する線素（$d\vec{s}|_{R_1}$）と R_2 に関する線素（$d\vec{s}|_{R_2}$）は、互いに逆向きなので、$\partial R_{1,2}$ 上では、

$$d\vec{s} \cdot \vec{A}|_{R_1} + d\vec{s} \cdot \vec{A}|_{R_2} = 0 \tag{46}$$

となる。図 29 C より、（ガウスの定理の時と同様に、）

$$\partial R_k = [\partial R_k]^* + \partial R_{1,2} \quad (k = 1, 2)$$

であり、R_1 と R_2 それぞれに定理が厳密に成立すると仮定すると、

$$\int\int_{R_k} dS\ \vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right) = \int_{[\partial R_k]^*} d\vec{s} \cdot \vec{A} + \int_{\partial R_{1,2}} d\vec{s} \cdot \vec{A}|_{R_k} \quad (k = 1, 2)$$

$k = 1$ と $k = 2$ の式を辺々足し合わせると、

$$\int\int_{R_1 \cup R_2} \vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right) = \int_{[\partial R_1]^* \cup [\partial R_2]^*} d\vec{s} \cdot \vec{A} + \int_{\partial R_{1,2}} \left\{ d\vec{s} \cdot \vec{A}|_{R_1} + d\vec{s} \cdot \vec{A}|_{R_2} \right\}$$

式（46）を適用すると、上式の { } 内は消えるので、

$$\int\int_{R_1 \cup R_2} \vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right) = \int_{[\partial R_1]^* \cup [\partial R_2]^*} d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

そして、図 29 C より、$[\partial R_1]^* \cup [\partial R_2]^* = \partial (R_1 \cup R_2)$ なので、上式は更に変形できて、

$$\int\int_{R_1 \cup R_2} \vec{n} \cdot \left(\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} \right) = \int_{\partial (R_1 \cup R_2)} d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

つまり、複合領域、$R_1 \cup R_2$、に関しても、定理が厳密に成立することが示せた。

次に、任意の二次元面 R を考え、それを、$X =$ 一定、$Y =$ 一定、$Z =$ 一定な平面上の長方形の パッチワークで近似すると、上記二つの結果より、近似したパッチワーク上では定理は厳密に成立する。

今、二次元面 R とその境界、∂R、を完全に共有するもう一つの二次元面、R'、を考え、その二つの面で囲まれた（閉じた）三次元領域を V と記す（図 29 D)。すると、３次元版ガウスの定理により、

$$\int\int_R dS\ \vec{n}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)-\int\int_{R'} dS\ \vec{n}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)=\int\int\int_V dxdydz\ \vec{\bigtriangledown}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right) \quad (47)$$

更に、任意の三次元ベクトル場 $\vec{A}$ に対し、

$$\begin{aligned}\vec{\bigtriangledown}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)_z\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\\&=0\end{aligned}$$

となるので、式（47）の右辺はゼロ。従って、

$$\int\int_{R'} dS\ \vec{n}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)=\int\int_R dS\ \vec{n}\cdot\left(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A}\right)=\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A} \quad (48)$$

となり、定理は R' に関しても厳密に成立する。

これらより、任意の 二次元面 R を近似した長方形のパッチワークについては定理は厳密に成立し、また、式（48）より、そのパッチワークと境界を完全に共有し、境界の内側では R とほぼ完全に重なり合う様な二次元領域でも、定理は厳密に成立する。従って、元々の二次元面 R 自体 に関しても、定理は 良い精度で 成立するハズである。
[注： ３次元ガウスの定理の時と同様に、この場合も、直方体（の境界を成す長方形）の他に、直角三角柱や直角三角錐（の境界を成す三角形）も切り貼りすれば、直方体（や長方形）だけから成るパッチワークよりもずっと滑らかに領域 R を近似できるハズである。直角三角柱や直角三角錐での定理の証明は、補遺 F を参照。]

[直観的導出終わり]

[注意：]
定理 7.2 や定理 7.4 の証明（導出）の際に登場した等式：

- rot (grad ϕ) $=\vec{\bigtriangledown}\times(\vec{\bigtriangledown}\phi)=0$;
- div (rot $\vec{A}$) $=\vec{\bigtriangledown}\cdot(\vec{\bigtriangledown}\times\vec{A})=0$

は、任意の微分形式、 $\mathbf{f}$、に対して成立する**恒等式**：

$$d(d\mathbf{f})\equiv 0$$

の特殊なケースである。[*27] この恒等式、および一般化されたストークスの定理、より、$d\mathbf{f} = 0$ なる n 次の微分形式 $\mathbf{f}$ は、少なくとも局所的には、ある $(n-1)$ 次の微分形式 $\mathbf{g}$ を用いて $\mathbf{f} = d\mathbf{g}$ と表現できる。

上記の例では、

- $\vec{\bigtriangledown} \times \vec{F} = 0$ となるベクトル場、$\vec{F}$、には少なくとも局所的には $\vec{F} = \vec{\bigtriangledown}\phi$ と表せるようなスカラー場（ϕ）が存在する；
- $\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{B} = 0$ となるベクトル場、$\vec{B}$、には、少なくとも局所的には $\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \times \vec{A}$ と表せる様なベクトル場（$\vec{A}$）が存在する。

[これらの例で、(特に電磁気学等では、) ϕ はスカラーポテンシャル、$\vec{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる。]

定理 7.5（２次元ベクトル場に関するグリーンの定理） $\cdots$ どういう形だったか正確に覚えていないので割愛。
[確か、狭義のストークスの定理（定理 7.4）の 2 次元版っぽい形をしていた様な気がする（ので、証明も同様にできるハズ)。]

定理 7.6（複素関数の基本定理と留数定理） 複素平面（$z = x + iy$）上で与えられた複素関数 $F(x, y) = F_x(x, y) + iF_y(x, y)$ （ここで F_x と F_y は (x, y) の実関数）が、z のみの関数である（即ち、共役複素数、$\bar{z} = x - iy$ 、に依らない）場合、

(i) 基本定理：

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \ F(x, y) = H(z_2) - H(z_1) \tag{49}$$

となる複素関数 $H(z)$ が存在する。（即ち、左辺の積分は（特異点に出会わない限り）z_1 と z_2 を結ぶ複素平面上の経路に依らない（図 30 A)。）

(ii) 留数定理：複素平面上の閉経路 C に囲まれた領域中に、上記の $F(x, y)$ 有限個（可

[*27] 証明自体は簡単だがここでは割愛する。興味ある方々は自分でお調べ頂きたい。

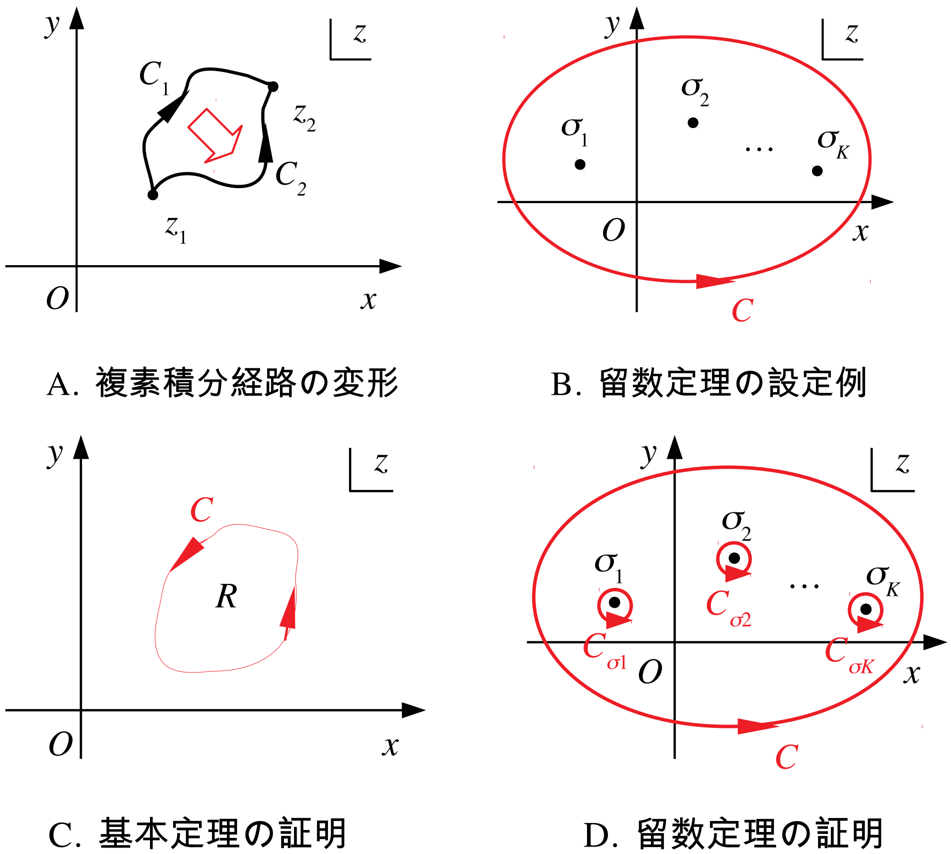


図 30　**複素関数の基本定理と留数定理。A.** 複素関数の積分経路 C_1 は、（特異点に阻まれない限り）端点（z_1 と z_2）を共有した任意の経路（例、C_2）に変形可能である（赤矢印）。**B.** 留数定理の設定例。閉経路 C（赤）が特異点、σ_1，σ_2，...，σ_K、を囲むとする。**C.** 基本定理の証明。複素平面上の閉経路 C（赤）とそれに囲まれた領域 R。**D.** 留数定理の証明。パネル **B** と基本的には同じだが、それに加えて各々の特異点、σ_k ($k=1$，2，...，K)、のみを囲む小さな閉経路、C_{σ_k}、も描き加えてある。

算個？）の孤立特異点 $z = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_K$ 以外の特異性を持たない場合（図 30 B)、

$$\oint_C dz\ F(x, y) = 2\pi i \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}[F, \sigma_k] \tag{50}$$

ここで $\mathrm{Res}[F, \sigma_k]$ は、複素関数 $F(x, y)$ の特異点 σ_k における <u>留数</u>と呼ばれ、次式で定義される：

$$\mathrm{Res}[F, \sigma_k] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\sigma_k}} dz\ F(x, y) \tag{51}$$

ただしここで C_{σ_k} は特異点 σ_k のみを囲む閉経路。

[証明]

先ず、$F(x,y)=F_x(x,y)+iF_y(x,y)$ が z のみの関数であるということは、

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}F=0$$

を意味する。$z=x+iy$ および $\bar{z}=z-iy$ より、$x=(z+\bar{z})/2$ および $y=(z-\bar{z})/(2i)$ なので、これは以下の様に書き換えられる：

$$0=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}F=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial x}F+\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial y}F=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}F+i\frac{\partial}{\partial y}F\right)$$

従って、

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial x}(F_x+iF_y)+i\frac{\partial}{\partial y}(F_x+iF_y)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}F_x-\frac{\partial}{\partial y}F_y\right)+i\left(\frac{\partial}{\partial x}F_y+\frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\end{aligned}$$

上式で、実部と虚部は独立にゼロとなるので、これは即ち、以下の二式を意味する：

$$\frac{\partial}{\partial x}F_x-\frac{\partial}{\partial y}F_y=0 \quad , \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y+\frac{\partial}{\partial y}F_x=0 \quad . \tag{53}$$

一方、（図 30 C の様に）複素平面上のある閉経路 C に沿った F の積分は、

$$\begin{aligned}\oint_C dz\ F(x,y)&=\oint_C d(x+iy)(F_x+iF_y)\\&=\oint_C(dxF_x-dyF_y)+i\oint_C(dyF_x+dxF_y)\end{aligned}$$

と書き表せ、この積分の実部は、２次元ベクトル場 $(F_x,-F_y)$ の線積分、虚部は、２次元ベクトル場 (F_y,F_x) の線積分、とみなすことができるので、狭義のストークスの定理（定理 7.4）（の z 成分）の導出と同様にすると、

$$\oint_C dz\ F(x,y)=-\int\int_R dxdy\left(\frac{\partial}{\partial y}F_x+\frac{\partial}{\partial x}F_y\right)+i\int\int_R dxdy\left(-\frac{\partial}{\partial y}F_y+\frac{\partial}{\partial x}F_x\right)$$

となることが示せる。ただし、ここで R は C に囲まれた複素平面上の領域である。F が R 内に 特異点を持たない限り、上式の右辺の実部は式（53）により、虚部は式（52）により、それぞれゼロとなるので、最終的に次式に帰着する：

$$\oint_C dz\ F(x,y)=0 \tag{54}$$

この事より、複素平面上の任意の二点、z_1 と z_2、を取り、図 30 A の様に、z_1 から z_2 への別々の二つの経路、$C_1(z_1,z_2)$ と $C_2(z_1,z_2)$、を考えた場合、$C_1(z_1,z_2)-C_2(z_1,z_2)$ は閉経路なので、その内部に F の特異点がない限り、

$$\int_{C_1(z_1,z_2)} dz\ F(x,y) - \int_{C_2(z_1,z_2)} dz\ F(x,y) = \oint_{C_1(z_1,z_2)-C_2(z_1,z_2)} dz\ F(x,y) = 0$$

即ち、

$$\int_{C_1(z_1,z_2)} dz\ F(x,y) = \int_{C_2(z_1,z_2)} dz\ F(x,y)$$

となる。これは、特異点で 隔たれていない 任意の経路で成立するので、適当にその（特異点で隔たれない）近傍で「基準点」z_0 を取って、

$$H(z_\bullet) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{C(z_0,z_\bullet)} dz\ F(x,y)$$

と置けば、

$$\int_{C_1(z_1,z_2)} dz\ F(x,y) \equiv \int_{z_1}^{z_2} dzF(x,y) = H(z_2) - H(z_1)$$

、即ち、式（49）が得られる。

次に、もっと一般に、$F(x,y)$ が孤立特異点、$z=\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_K$、を持つとし、これらを囲んだ閉経路 C を考える（図 30 B)。更に、C_{σ_k} を特異点 $z=\sigma_k$ のみを囲む微小閉経路とすると、$C-\sum_{k=1}^{K} C_{\sigma_k}$ は、$F(x,y)$ が非特異な領域、$R/\{\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_K\}$、の「境界」となっている（図 30 D）ので、式（54）の導出と同様にして、

$$\begin{aligned}&\oint_{C-\sum_{k=1}^{K} C_{\sigma_k}} dz\ F(x,y)\\ &= \int\int_{R/\{\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_K\}} dxdy \left\{ -\left(\frac{\partial}{\partial y}F_x + \frac{\partial}{\partial x}F_y\right) + i\left(-\frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial x}F_x\right)\right\} = 0\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\oint_C dz\ F(x,y) &= \oint_{\sum_{k=1}^{K} C_{\sigma_k}} dz\ F(x,y)\\ &= \sum_{k=1}^{K}\oint_{C_{\sigma_k}} dz\ F(x,y) \equiv 2\pi i \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}[F,\sigma_k] \quad 、\end{aligned}$$

即ち、式（50）が導かれた。

[証明終わり]

[注：留数の定義に伴う係数について]

例えば、 $F(x,y)=1/(z-\sigma_1)$ を考え、C_{σ_1} として、

$$z=\sigma_1+\epsilon e^{i\theta} \quad (\theta=0\to\theta=2\pi; \quad \epsilon\text{は微小})$$

を採用すると、[*28]

$$\oint_{C_{\sigma_1}} dz\ F(x,y)=\oint_{C_{\sigma_1}}\frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}=\int_0^{2\pi}\frac{id\theta\ \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}}=2\pi i$$

従って、

$$\mathrm{Res}[F,\sigma_1]=\frac{2\pi i}{2\pi i}=1$$

となる。逆に言えば、留数の定義で積分の前にかかる係数、 $\frac{1}{2\pi i}$ 、は、留数がこうなる様に付けられた「規格化因子」とも言える。

7.2 応用例

冒頭でも述べた通り、一般化されたストークスの定理の特殊例は、物理学の様々な場面で現れる。ここでは、それらの例を見てみよう。

7.2.1 ニュートンの運動方程式

力場、$\vec{F}(\vec{r},t)$、中での質量 m のある物体の変位を $\vec{r}(t)$ とすると、ニュートンの運動方程式は、

$$m\left(\frac{d}{dt}\right)^2\vec{r}(t)=\vec{F}(\vec{r},t)$$

---

*28

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\theta)^n=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}(i\theta)^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}(i\theta)^{2m+1}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}+i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}=\cos\theta+i\sin\theta$$

従って、複素平面の極座標表示の下では、

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

となる。また、上記の $z=\sigma_1+\epsilon e^{i\theta}$（$\theta=0\to2\pi$）は、点 $z=\sigma_1$ の周りの半径 ϵ の円周を与える。

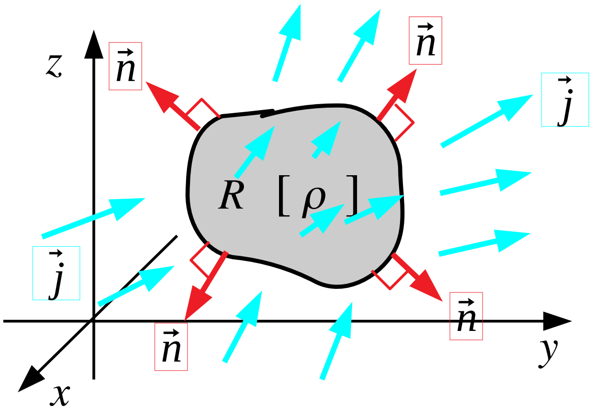


図 31　**連続の式の設定例。**三次元領域 R（灰色）の内側にはある量が密度 $\rho(\vec{r},t)$ で満ちており、周囲（および内部）には流れベクトル場 $\vec{j}(\vec{r},t)$ （シアンの矢印）が分布している。R の境界上での外向き法線（$\vec{n}$）の例を赤い矢印で示している。

となる。ここで、もし、rot $\vec{F} = \vec{\bigtriangledown} \times \vec{F} = 0$ なら、$\vec{F} = -\mathrm{grad}\ \phi$ なるスカラー場 $\phi(\vec{r},t)$ があり、運動方程式は、

$$m\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \vec{r}(t) = -\mathrm{grad}\ \phi(\vec{r},t) \quad (= -\vec{\bigtriangledown}\phi(\vec{r},t))$$

となる。（定理 7.2 の応用）

7.2.2　連続の式

場所 $\vec{r} = (x,y,z)$、時間 t、におけるある量の密度を $\rho(\vec{r},t)$ 、それをもたらす流れ（ベクトル場）を $\vec{j}(\vec{r},t)$ とすると、任意の閉じた 3 次元領域、R、の中でのこの量の時間変化を表す式（積分形）は：

$$\frac{d}{dt}\left[\int\int\int_R dxdydz\ \rho(\vec{r},t)\right] = -\int\int_{\partial R} dS\ \vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \tag{55}$$

ここで、∂R は R の境界であり、$\vec{n}$ は、領域から外向きに出る境界の法線である（図 31）。即ち、領域 R 中の量の時間変化（左辺）は、この領域に境界（∂R）を通じて流れ込む 流れの総量（右辺）によってもたらされる。この右辺に三次元版ガウスの定理（定理 7.3）を適用すると、以下の様な微分形が求まる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \tag{56}$$

この式は「**連続の式**」と呼ばれ、連続体力学、電磁気学、etc. で重要な役割を果たす。

7.2.3　拡散方程式（熱伝導方程式）

連続の式（56）の特殊例として、$\rho(\vec{r},t)$ の場所による差が流れ $\vec{j}(\vec{r},t)$ を引き起こす場合を考える。普通、密度が高い方から低い方へ流れが生じるのが自然なので、一般的に、

$$\vec{j}(\vec{r},t) = -f[\vec{r},t,\rho]\vec{\bigtriangledown}\rho(\vec{r},t)$$

ここで、$f[\vec{r},t,\rho]$ は、（一般には場所と時間、そして ρ に依存する）「比例係数」である。これを式（56）に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{j} = \vec{\bigtriangledown}\cdot\left\{f[\vec{r},t,\rho]\vec{\bigtriangledown}\rho(\vec{r},t)\right\} \tag{57}$$

これは一種の<u>拡散方程式</u> である。

例えば、ρ として、温度 T、[*29] そして $\vec{j}$ として熱流、$-\kappa\vec{\bigtriangledown}T$、を用いると、拡散方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}T(\vec{r},t) = \vec{\bigtriangledown}\cdot\left\{\kappa\vec{\bigtriangledown}T(\vec{r},t)\right\} = \kappa\bigtriangleup T(\vec{r},t) \tag{58}$$

となり、<u>熱伝導方程式</u> を与える。[*30]

[ちなみに、次元を一次元に落とし、x の代わりに（ある遺伝子座における一つの対立遺伝子の）相対頻度 p（$0\le p\le 1$）を用い、$\rho(\vec{r},t)$ の代わりに p の（時間変化する）分布関数 $\phi(p,t)$ を用い、更に、$f[\vec{r},t,\rho]$ として $\frac{p(1-p)}{2N}$ （ここで N は（ハプロイド個体（あるいはゲノム）の）（有効）集団サイズ））を用いる[*31] と、式（57）は、以下の様になる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,t) = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p(1-p)}{2N}\frac{\partial}{\partial p}\phi(p,t)\right]$$

これは、木村資生による集団遺伝学における（淘汰ゼロの場合の）遺伝子頻度変化モデルの拡散方程式近似と（ほんの僅かだけ違うが）非常に似た形となる。]

*29　本当は熱エネルギー密度、$\rho_Q = \alpha\,\delta T$、とでもした方がよかったのかも知れない。

*30　ここで、

$$\bigtriangleup \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

は、ラプラス演算子（Laplacian）と呼ばれる。

*31　これは、p の一世代あたりの（ランダムサンプリングに由来する）揺らぎによる分散値、$\frac{p(1-p)}{N}$ 、の 1/2 になる様に定めた。（この 1/2 の因子は、分散が一定の時の熱伝導方程式の解との類推によって選ばれた。）

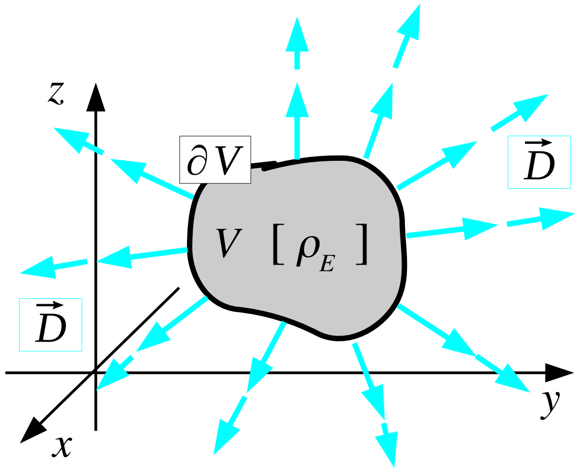


図 32　一般化クーロンの法則（ガウスの法則？）の設定例。電荷密度（$\rho_E(\vec{r},t)$）が三次元領域 V（灰色） の内部に分布し、その境界 ∂V （黒の太線）から外向きに電束密度ベクトル場、$\vec{D}(\vec{r},t)$ 、（シアンの矢印）が出ている。

7.2.4　マックスウェルの方程式

18&19 世紀に成された電磁気学における数々の発見のうち主要な（あるいは基本的な）ものを、マックスウェル（Maxwell）は次の四つの方程式にまとめ上げた：

(a)　$\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{D}=\rho_E$　;

(b)　$\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{B}=0$　;

(c)　$\vec{\bigtriangledown}\times\vec{H}=\vec{j}_E+\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$　;

(d)　$\vec{\bigtriangledown}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$　。

ここで、$\vec{E}$ は電場、 $\vec{H}$ は磁場、$\vec{D}$（$=\epsilon\vec{E}$ ）は電束密度（単位面積当たりの電束量）*32、$\vec{B}$（$=\mu\vec{H}$）は磁束密度（単位面積あたりの磁束量）*33、ρ_E は電荷密度（単位体積あたりの電荷量）、$\vec{j}_E$ は電流密度（単位面積あたりの電流量）、である。

(a) は、クーロンの法則の一般形（ガウスの法則だったか？）：

$$\int\int_{\partial V} dS\ \vec{n}\cdot\vec{D}=\int\int\int_V dxdydz\ \rho_E \tag{59}$$

即ち、ある（閉じた）3 次元領域 V（図 32）から外向きに出る電束の総量（左辺）はその

*32　係数 ϵ は誘電率と呼ばれる。

*33　係数 μ は透磁率と呼ばれる。

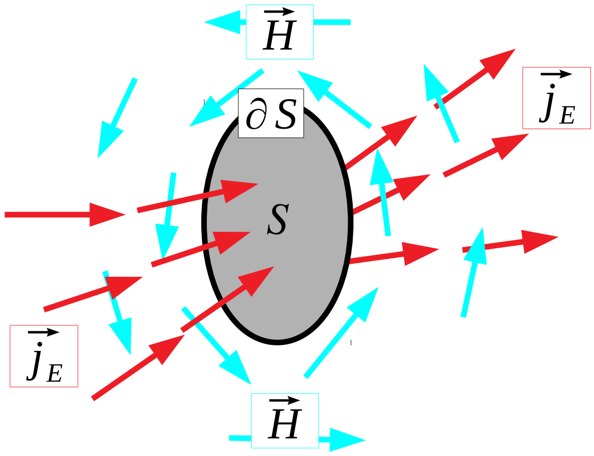


図 33　右ネジの法則の設定例。二次元領域 S（黒い境界の灰色の領域） を電流密度ベクトル $\vec{j}_E(\vec{r}, t)$ （赤い矢印）が貫き、その周りに磁場ベクトル $\vec{H}(\vec{r}, t)$ （シアンの矢印）が生じている。

領域 V 中の電荷の総量（右辺）に等しい事、の左辺に 3 次元版ガウスの定理（定理 7.3）を適用して導出される。[*34]

(b) は、電場に関する式 **(a)** と対をなす方程式で、単一の磁極をもった物体（モノポール）が存在しないことを意味する。[我々の知る磁極を持つ物体（磁石）は常に N 極と S 極の両方を有する。]

(c) に関しては、もともとはアンペール（Ampère）の右ネジの法則（図 33）:

$$\oint_{\partial S} d\vec{s} \cdot \vec{H} = \int\int_S dS\ \vec{n} \cdot \vec{j}_E \tag{60}$$

即ち、ある 2 次元面 S を貫く電流がある時、その総量（右辺）に等しいだけの磁場（の一周回りの総和）（左辺）が生じる、という法則に、狭義のストークスの定理（定理 7.4）を適用した式：

$$\vec{\triangledown} \times \vec{H} = \vec{j}_E \tag{61}$$

があった。しかし、このままでは（電荷に関する）連続の式、$\vec{\triangledown} \cdot \vec{j}_E + \frac{\partial}{\partial t}\rho_E = 0$、と矛盾してしまうので、両者に矛盾が生じない様に、式（61）の右辺に $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ を加えてできたの

*34　ちなみに、空間の等方性（回転対称性）と、V として半径 R の 3 次元球体を用いた式（59）を使うと、$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q_E}{4\pi R^2}$ というクーロンの法則が簡単に導出できる。（ただし、$Q_E \equiv \int\int\int_V dxdydz\ \rho_E$ は、V の中心にある点電荷、もしくは球対称に分布した電荷の総量。）

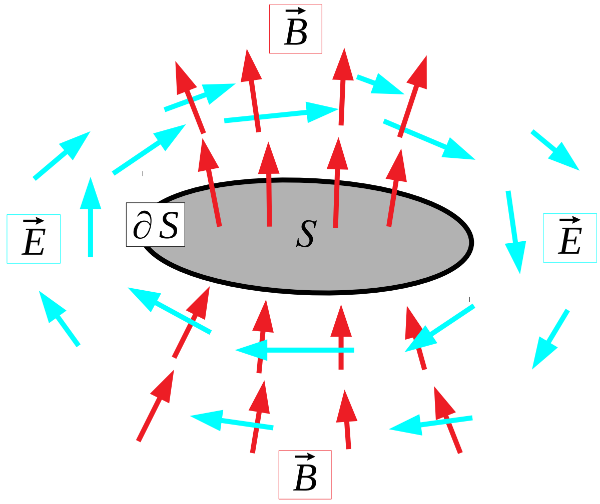


図 34　**電磁誘導の法則の設定例。**二次元領域 S（黒い境界の灰色の領域）を時間変化する磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r}, t)$（赤い矢印）が貫き、その周りに電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r}, t)$（シアンの矢印）が磁束の時間変化を打ち消す様に生じる。

が **(c)** である。*35

ちなみに、この $\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ の事を「(ファラデー？マックスウェル？）の変位電流」と呼んだような気がするが、記憶が定かではない。

(d) は、ファラデー（Faraday）の電磁誘導の法則（図 34）:

$$\oint_{\partial S} d\vec{s} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt}\left[\int\int_S dS\ \vec{n} \cdot \vec{B}\right] \tag{62}$$

即ち、ある二次元面 S を貫く磁束が変化する時、その時間変化量（右辺の積分）を打ち消そうとする（右辺のマイナス符号）様に周囲の電場（左辺）が生じる、という法則に狭義のストークスの定理（定理 7.4）を適用して導出できる。

ちなみに、マックスウェルの方程式 **(a), (b), (c), (d)** は、ローレンツ（Lorentz）変換に対し不変であることが示せ、そういった意味でアインシュタイン（Einstein）の特殊相対性理論と相性が良いのであるが、その証明はここでは割愛する。(興味ある方々は自分で調べていただけると幸いである。)

---

*35 実際、**(c)** の両辺の発散を取ると、

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_E + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right) \overset{\text{(a)}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_E + \frac{\partial}{\partial t}\rho_E$$

となり、まさに、電荷に関する連続の式が導ける。

8　英語学習の「ツボ」２つ（＋おまけ）

江澤　潔　[手書き：2020/12/31; 電子文書化：2021/03/13]

私は英語の専門家でもなければ英語学習の専門家でもないので、ここで包括的な（あるいはカリキュラム的な）英語学習の方法を記述するといったおこがましい真似はしない。[*36]（まあ、以下の文章でも十分おこがましいが、、、。）

しかしながら、私も英語をある程度、仕事で使える様になるまでには、少なくとも十数年にわたる苦労をして来た。（補遺 H 参照。ちなみに私の家系はどうも英語に弱いらしいので、私のゲノムには英語学習を得意にする遺伝子はないハズである。）そこで、ここでは、私がかなり重要だと思う一方で、日本の英語学習であまり認識（あるいは強調）されていない、と思われる「ツボ」を二つ（＋おまけ）について述べる。これらは、他の包括的な英語学習法に付け加える「スパイス」（例えるならば、寿司盛り合わせに添えるガリ（生姜）、コーヒーに入れるクリープ、あるいはスイカにふりかける一つまみの塩）の様に使用（あるいは実施）して頂けたら幸いである。

8.1　［ツボ１］英語は「動詞志向」の言語だと心得る

私が思うに、日本語を「名詞志向」（noun-oriented）の言語だとするならば、英語は「動詞志向」（verb-oriented）の言語である。

日本語では、名詞（＋助詞）だけで成る文も多いが、英語では（疑問文に対する答えの省略形以外で）名詞だけで成る文はほとんどはい。その代わりに、英語では（主に命令文になるが）動詞一つだけで成る文は多い。

また、日本語では「名詞」＋「（を）する」で、様々な動作を表せるが、英語でそれに対応するのは、「動詞」一つである場合が多い。例えば：

[日本語]	[英語]
スキー（を）する	ski
スケート（を）する	skate
グーグル検索（を）する	google

[*36] そういったものが必要な読者は他をあたってほしい（例えば、アルクや DHC 等）。ただし、一応（何の手がかりもなく悩んでいる人々の）参考のために、補遺 H で、私が過去に英語学習の為に用いた教材や方法をリストしておくので、興味ある方はご覧頂けたら幸いである。

E メールを書いて送る　　　e-mail (又は email)

等である。[*37] [ちなみに、上記の例外として、様々な球技（例：「野球をする」↔ ”play baseball”）や、楽器（例：「ギターを演奏する」↔ ”play guitar”）等がある。どういう場合にこれら例外にあたるのか、「法則」のようなものもあった様な気もしたが、私は忘れてしまった。興味ある方は自分で調べて頂きたい。]

しかしながら、これくらいでは「英語が『動詞志向』だ」と言われても納得しない人々も多かろう。でも、そんな人々でも、以下の例を見れば納得いくに違いない。

例えば、日本語の「雑草」にあたる英語は名詞、weed、であるが、「（その）庭の草むしりをする」を日本語的感覚で英訳すると：

”remove weeds {from, out of} the garden”

となるが、英米人は普通、こんな言い方はせずに：

”weed the garden”

と言うだろう。これは、単語 ”weed” には、「（～の）草むしりをする」という（他）動詞の意味もあるからである。また、「（その）花に水をやる」は、日本人的感覚では：

”give water to the flower”　あるいは　”{sprinkle, pour} water over the flower”

あたりに訳してしまいがちだが、英米人はもっと簡潔に：

”water the flower”

と言う。これも、単語 ”water” には、「（～に）水をやる」という（他）動詞の意味もあるからである。更には、「（その）犬の散歩をする」を日本人的感覚では：

”take the dog for a walk”

と訳してしまいそうだが、英米人なら：

”walk the dog”

と表現する。これも ”walk” には、「（～を）散歩させる」という他動詞の意味もあるからである[*38]。

この様に、**日本人が普通、名詞として知っている単語の多くには、実は、動詞としての意味もあり、ネイティブスピーカーたちは日常的にこれらの動詞を使用している。** このことを理解しておけば、英語を話したり書いたりする時に英米人らしい簡潔（concise）かつ明快（clear）な英文を作成できる様になるし、又、英語を読んだり聞いたりする時に誤

[*37] この面白い例としては、数年前、近藤まり子（？）（間違っていたらゴメンなさい）という方が、「断捨離」の本を出してブームになったが、そのブームは米国にも拡がったらしく、その結果、「断捨離（を）する」という意味の ”kondo(u?)” (”k” が大文字か小文字かは不明）という新しい動詞が誕生したらしい。

[*38] 面白いことに、「自転車を押して歩く」も ”walk a bike” で済んでしまうらしい；こういう表現を横須賀の歩道橋の看板で見かけたことがある。

解する頻度が劇的に減るであろう。*39

中学三年だったか高校だったか忘れたが、**「無生物主語構文」**なるものを習った。例として、「この議論によって〜という結論に達する。」を英米人は恐らく：

”This argument {leads to, yields} the conclusion that ...”

等と表現するだろう。この主語である ”this argument” が無生物主語なので、この文は「無生物主語構文」の一例となるのだが、日本人的発想では、

”{By, Through From} this argument, we {get, reach} the conclusion that ...”

と少し長たらしい表現を思いつきがちである。

この「無生物主語構文」は、英米人が世界を捉える時の論理構造あるいは発想の仕方が我々日本人と異なる事を示す一例だとも解釈できるが、この小節で論じた「動詞志向性」も英米人と我々の間の世界の捉え方の違いとして理解できよう。[その他、それぞれの単語の意味が決して一対一対応しない、という事実も世界の捉え方の違いの一つと解釈できるかもしれない。] そう考えると、「動詞志向」の英語表現や「無生物主語構文」を（もちろん適切な場面で）多用しようとする試み／努力は、彼ら英米人の世界の捉え方を理解しようとする努力とも考えられる。

また、この動詞表現の豊富さ故に、ある単語（特に名詞）を辞書で調べる際には、それに動詞の意味があるか？あったらそれは自動詞か他動詞か？前者の場合、どんな前置詞がよく後に続くか？等々にも注意を払う様にお勧めする。

8.2 [ツボ2] 英文の中の S（主語）+ V（動詞）を<u>正確に</u>同定する

文法の観点から見ると、柔軟な日本語に較べ、英語は非常に「融通の利かない」言語であるといえる；（疑問文の答えの省略形や命令文、感嘆文等の）一部例外を除き、英語の文は必ず

「S（subject, 主語）+ V（verb, 動詞）」

を含み、それ以外は修飾語である*40。従って、**極論を言うと、英文の中の「S + V」***41

---

*39 ただし、この様な英語をネイティブスピーカーとの会話で多用すると、相手は「こやつ、出来るな」と思って、手加減なしの早口英語で話しかけてくるかも知れないので注意しよう。もし、相手のスピードについていけない時は、黙り込んだりニヤニヤして誤魔化そうとせずに、率直に、”{Excuse me, Pardon me, Sorry}. Could you speak more slowly?” と頼もう。それでも、リエゾンや縮約等、単語の発音が変わってしまう現象の為に、我々日本人には聞き取りづらい場合も多々ある。そんな時は、”Could you {speak, pronounce} word by word?” とでも頼むと良いのかも知れない。

*40 目的語や補語を「修飾語」扱いして良いかどうかは議論がありそうだが、ここではこれらをひっくるめて「<u>広義の</u>修飾語」とでも呼んでおくこととし、「広義の」はしばしば省略する。

*41 ここで、「S」や「V」は、単にそのコアである「（冠詞／指示詞+）名詞」や（単語としての）「動詞」の

を正確に 同定できれば、その英文の８割方は理解できたも同然である。［ ただし、重文（例えば、"$S_1 + V_1$ ..., and/but/etc. $S_2 + V_2$ ..." 等、二つ以上の同等な節からなる文）や複文（that-節や関節疑問文、あるいは関係代名詞／副詞節等、従属節を含む文）の場合は、各々の節の中の「S + V」を正確に同定する事とする。］

教科書でも、他の教材でも、あるいは自分で読みたい記事や小説でもなんでも良いが、英語学習を始める（あるいは再開する）際には、各文（節）中の主語の下に線を引いて"S" と印をつけ、動詞（区）の下にも線を引いて "V" と印を付けると良い。慣れてくれば、下線や印をつけなくとも、どこが主語でどこが動詞か、見極められる様になるだろう。この作業は特に、スクリプト付きの英語リスニング（聞き取り）用の教材で行う事をお勧めする。これにより、英語を聞き取る際にも、「S + V」の基本構造を捉えられる様になれば、リスニング力は目覚ましく向上するだろう。

8.3 [おまけ] 最終（？）目標：英文を英文のまま理解する

英語学習を始める際に、日本語を「補助」に使って、即ち、英文を和訳して、理解するのが、これまでの日本での英語教育のやり方であったので、それはある程度やむを得ない点がある。しかしながら、この様に、「日本語を介して」英文を理解する方法には、**二つの大きな欠点** がある。（１）「ツボ１」でも述べたように、そもそも日本人と英米人では「世界の捉え方」がかなり異なるので、表現の仕方も一対一対応しない。その結果、例えば、和文を逐語訳した様な英文は「不自然な英文」となり、本人（日本人）は「正確に訳した」つもりがかえって英米人には通じない、あるいは通じにくい、英文になることがしばしばある。［ 私自身、初めての学術論文を英語で著した頃は、まず和文を考えてそれを英訳していたが、アメリカ帰りの教官に「こんな英語表現はない」と注意され、その後からは、初めから英文を頭で考えて書くようになった、といういきさつがある。］（２）日本語と英語では語順が異なる為、英文を、その和訳を介して理解していたのでは、どうしても話し、書き、読みのスピードが上がらないし、英語のニュースやスピーチや講義、議論等にはどうしても付いて行けなくなる。

従って、最終的には、**「英文を英文のまま理解する」** 事がどうしても必要になってくる。

この為の「中間ステップ」として重要な訓練法は、英語の各文を **「チャンク」** と呼ばれる、一つの意味をなす（隣り合った）単語の集まりに「分解」し、チャンクの間にスラッシュ

他に、それを直接就職する語（句）をひっくるめても良い。

(”/”）を入れて、読み、聞き、話し、の練習を繰り返す事である。[42]

その「第一段階」としては、各単語（もしくは各チャンク）レベルでの和訳をしても良い[43]；大事なのは、英文の語順通りに理解する事である。（従って、「不自然な」日本語でも気にせず、「形」よりも「意味が通っている事」を重視する。）

そして、それに慣れてきたら、「第二段階」として、英語の単語を いちいち和訳せずに理解する。この際、意味の分からない単語や熟語がでてきたら、「英英辞典」を使って、英語のままで意味を確認するクセをつける。初めは慣れないかも知れないが、こう言う「訓練」を繰り返すうちに、徐々に、**「英語モードの頭」** が出来上がって来るであろう。

そして、完全に慣れたら、チャンクの間にスラッシュを入れずとも、自然に「英文を英文のまま理解する」ことが出来る様になるハズである。

私は、英語学習の真髄は、**「習うより慣れろ」** にあると思っている。いくら、頭で（即ち、理論的に）理解していても、実用レベルで 使える様になる為には不十分であり、どうしても、「繰り返し、練習する」（即ち、**「「体で覚える」」**）という行程（作業）が必要となって来る。とは言え、あまり根を詰めてやると長続きしないので、1 日あたり適量を楽しみながら、できれば毎日訓練するのが、英語上達のカギかもしれない。

皆様方のご健闘を心よりお祈りする。

9 「行間」を読む

江澤　潔　[手書き：2020/12/31-2021/01/01; 電子文書化：2021/03/13]

何でもそうだが、文章を読む際にはその字面（じづら）だけでなく、その「行間」を読む事が重要になる事が多い。（孔子の弟子（使徒？）の中でも最も賢いとされた）顔回は「一を聞いて十を知」ったらしいが、そこまで行かなくとも、「行間」を上手に読めれば、一行につき 2 ～ 3 行分の知識（あるいは「啓発」）を得られるかも知れないし、逆に「行間」を無視したら、書き手の言わんとしていることの 1/3 も理解できないかも知れない。

特に、専門的な教科書や論文、あるいは総説等を読む際には「行間」を読めるかどうかは専門家として死活的な問題になり兼ねない。そこで、ここでは、そういう書物（あるいは文献）の「行間」の読み方について私が思うところを述べる。

まず、分野を問わず、一般的に言える事としては、現在読んでいる文（あるいは段落）

[42] 一番大雑把なチャンクの分け方は、「S（主部）＋ V（動詞句）＋（それ以外）」であるが、SVOO や SVOC や複文等では、「(それ以外)」も二つ以上のチャンクに分けられる。

[43] これは、同時通訳者養成訓練の「区切り聞き通訳」に似ている。

で引用している文献を既に知っているかどうか？がある。引用文献を既に読んでいれば、当然ながら、その文（や段落）の理解度は向上する。かと言って、その書物（文献）で引用してある文献全てを既に読んでいる必要は普通ないだろう。[もし必要あったら、「孫引き」の連鎖で文献の読みがストップし兼ねない！] 今、読んでいる書物（文献）中でも重要な箇所で引いてある文献や、それ以外でも重要と思われる文献だけに絞って読むだけでも、それらを全く読んでいないで書物（文献）を読むのと較べれば、理解度に格段の違いが生じるであろう。

次に、数学（ここでは実用数学としておく）や物理（とりわけ理論物理学)、あるいは他の数理科学に関する書物（文献）についてを考える。こう言う書物（文献）を読む際に特有の「行間」の読み方として、数式のフォローがある。

これは非常に重要なことであり、これをしっかりとやっておかないと、せっかく読んだその書物（文献）の内容が、後に実際に自らの研究等で使える様な **「有機的な」「活きた」知識** として身につかない！！今、読んでいる書物（文献）中に**数式**が登場した場合、先ず、それは、(a) ここで導入された「公理」「定義」「仮説」か？それとも (b) 以前に示された数式の引用か？あるいは (c) それ（ら）から導出されたものか？を見極め、いずれの場合もその**数式**の意味するところをきちっと理解し、(a) の場合はそれが導入された理由（裏にある論理）を理解し、(b) の場合は引用された文献の源の箇所をチェックし、(c) の場合はその導出の「行程」（あるいは「道筋」）をフォローする 事が大切である。

特に (c) の場合、一つの（不）等式の導出がノート数ページ分におよぶ事がしばしばあり、そのせいでその書物（文献）を 1 ページ読むのに数日から一週間くらいかかることもたまにある。それでも、そこで諦めてしまったら、その知識が真の意味で「身に付いた」事にはならないので、仮に一旦そこを飛ばして読み進んだとしても、その箇所には付箋でもしておいて、またしばらく経ったら読み返そう。次に読むときには、その間に身についた他の知識の助けもあったりして、意外とフォローできたりするものである。また、その様な「一筋縄には行かない（不）等式」の前後にはしばしば文献が引用されており、その文献に導出の仕方あるいはそのヒントが記述されている事が多いので、どうしても導出法が解らなかったりしたら、そういう引用文献を参照する。[*44]

人間というのは面白いもので、苦労して身に付けた知識や技能はかなり長期間忘れずにいられるが、楽して身に付けたものはすぐに忘れてしまうものである。そこで、書物や文献を読む際も、せめて自分の専門分野に直接関連する様な文献や書物（あるいはその箇

[*44] 今ではインターネットが発達しているので、そういった参考文献の入手や閲覧は昔と較べて格段に容易になったし、数式のフォロー自体、適切なキーワードを用いれば、ひょっとしたら、もっと容易に出来るかも知れない。

所）ぐらいは、丁寧に参考文献を調べ、数式をフォローして、じっくりと読みたいものである。そうやって身に付けた専門知識・技能は必ずやあなた自身の「血」や「肉」となり、その後の研究を進める上で大いに役立つ事であろう。[*45]

さて、最近の（理論的）遺伝学などを含む数理生物学の文献等を読んで思うことは、どうも怪しげな数式が散見されることである。ある場合には、最初に「仮説」として提示される数式からして怪しいし、またある場合には筆者らの定義（説明）した「処方せん」に沿って計算しても、論文の中に記述された数式に到達できないこともある。（そして、いずれの場合も、私が「これで正しいハズだ」と思う数式をそこに置くと、あとはうまく行ったりする。）

一方、1980 年代以前の、例えば集団遺伝学関係の文献を読んだ際には、こうした「怪しげな数式」に出会うことは稀である。

私が思うに、1990 年代のパソコンの普及によって、それまでは数学が得意でないと容易に参入できなかった分野（例えば集団遺伝学）にも、プログラミングさえできれば、数学がさほど得意でなくとも参入できる様になったことが、「怪しげな数式」の増殖の一因なのではなかろうか。

いくらプログラミングが正しくできても、その基となる数式自体が間違っていたら、そのプログラムは間違った答えを出力し、結果としてそれを使った論文は間違った結論を与えてしまうこととなる。従って、近年の数理生物学の参入者達にお願いしたいのは、数学部分もしっかりやって欲しいという事である。（自分が数学が苦手ならば、数学の得意な人の助けを借りても良い。）何故なら、間違った（あるいは「怪しげな」）数式の氾濫は、やがてその数理生物学の分野を崩壊させ兼ねないからである。

また、できるだけ文献の「『行間』を読む」ことを徹底して、「怪しげな数式」を発見し、修正することもこれからは大切になってくるやも知れない。

10　終わりに～「物事を習得するコツ」について～

江澤　潔　[手書き：2020/12/12-13 & 15; 電子文書化：2021/03/16-17]

この手記を終えるにあたり、「物事を習得するコツ」について、私の思うところを語っておこうと思う。

世間一般に知られているものも含め、物事を習得する（あるいは何か目標を達成する）

[*45] 逆に、数多くある文献の中から自分の研究に深い関係のあるものを選ぶ場合には、「斜め読み」等、「速読法」が活躍するかも知れない。

コツとして、私が今思いつくのは次のようなものである：

（１）　その物事を好きになる、あるいはそれに興味を抱く；
（２）　その物事を習得する事が死活問題になる様な状況に自分を追い込む；
（３）　大きな目標を達成するためには、まずそれや自分の現状を分析して、それを達成するのに必要な「小さな目標」を（現状や環境に合わせて）幾つか設定し、その小さな目標を一つ一つ達成する様にする；
（４）　（（３）と関連して、）ドラマや RPG（ロールプレイングゲーム）の主人公になったつもりで、「習得すべき物事」はあくまでもその「行程」の途中の（「レベルアップ」の為の）「課題」とみなして取り組む；
（５）　（特に暗記事に関して）ただたんに機械的に暗記するのではなく、何か別の物事と関連づけて暗記する；
（６）　（（５）の特殊例として、）何かを覚える時には、それに関連したストーリーに埋め込んだ形で記憶する。

（１）については大方の人々は納得できるであろう。人間は、好きな、あるいは興味ある、物事に関しては、他人に強要されなくても自発的に調べ、覚え、そして少しくらいの困難にぶつかっても自分自身で創意工夫して乗り越えるものである。皆さんも、学校の成績はさほどかんばしくなくとも、自分の好きな対象、例えば、昆虫、戦国武将、飛行機、自動車、あるいは怪獣、等々、についてやたらと詳しく覚えている子供達が身近にいたりするだろう。「好きこそ物の上手なれ」ということわざは、ダテに存在するわけではないのだ！

これを応用すれば、要は、習得しなければいけない物事が好きになれば、あるいはそれに興味を持てれば、習得する事はさほど苦にならなくなる、という事である。しかしながら、これはそう簡単な事ではない。何故なら、「好き」「嫌い」という感情や物事への「興味」は、自然に湧いてくるものであり、１００％制御可能ではないからだ。ただ、一つだけ確かなことがあるとすれば、親（あるいは教師）が子供（達）に口やかましく「勉強しろ」とか言う事は、ほぼ間違いなく子供達の興味、そしてやる気を奪い、逆効果になる、と言う事だ。

子供に習得させたい物事があるならば、強要する代わりに、例えば、その物事に関連した絵本、マンガ、ゲーム、映画、等々、といった**「エサ」**を子供の目のつく所にそっと置いておき、自発的に興味が湧く様に仕向ける、なんていうのは一つの方法かも知れない。

（２）「火事場の馬鹿力」ということわざ（？）もある様に、人間は本当に追い込まれた

状況に置かれると、（恐らく大量のアドレナリンを分泌して、）普段の実力以上の力を発揮するものである。私が聞いたことのある話では、ある会社の英語の苦手な社員（当初のTOEIC スコアが４００未満）が、いきなり米国の支社（？）に単身で飛ばされ、一年経って帰ってきたら、英語が流暢（TOEIC スコアが７００以上）になっていた、そうである。

同様に、自分をそうせざるを得ない状況に追い込み、更に「退路」を絶ったならば、それまでの実力では習得／達成できない様な物事を習得／達成できる様になるかも知れない。（しかしながら、失敗した時は文字通り「死」かそれに近い様な結末が待っているので、それ相応の覚悟は必要である。）

（３）これは、他の人が既に唱えていることの受け売りである。（例えば「すぐやる！」（菅原洋平著、文響社）等を参照。）よく、「新年の抱負」等が実行（あるいは実現）出来ないのは、あまりにも大きすぎる目標を立ててしまうからである。しかしながら、そんな「大きな目標」でも、（恐らく長年かけて）達成するには、その「大きな目標」を分析して、幾つかの**「小さな目標」の集合**に分解してしまえば良い。そして、その時の自分自身の能力等の現状、およびその時から先に続く教育カリキュラム等の環境を考慮して、その「小さな目標」を達成しやすい様に**スケジュール**に組み込んでいけば良い。そして、大切な事は、その様な、「小さな目標」の集合やスケジュール等は、作りっぱなしにせずに、時間が経つにつれ、「大きな目標」への理解や自分の現状や取り巻く環境等（およびスケジュールの進行具合）が変化するのに応じて、更新することである。

実は、私自身、最後の研究プロジェクトをやり遂げられたのは、予めそれを１０数個～２０数個の「小さな目標」に分解して一つ一つ達成していったからである。又、羽生結弦選手や吉田沙保里さんの様な、国民栄誉賞級の（元）超一流スポーツ選手達も、（それが意識的にか、無意識にか、あるいは結果としてそうなったかの違いはあるかも知れないが、）そこまで到達するまでには、幾つもの「中途段階」を経ていたハズだし、又、大谷翔平選手が今、米国大リーグで活躍されているのも、そういった「大目標」をいくつもの「小目標」に分解して配置した「行程表」があったからだ、という話も聞く。（ちなみにその「行程表」は、時系列にあわせて配置した一次元的なものというよりも、中心の「大目標」から放射状に伸びたネットワーク上のものであるらしい。（ダイレクト出版社からのメールで知った。））比喩的に一言で表現すると、「ツルツルした大きな坂道は登るのが大変だが、そこに段差（あるいは階段）を設ければ登るのが楽になる。」と言う事である。

このやり方のもう一つの利点は、どうしても達成したい「大きな目標」の為にやらねばならない「小さな目標」が、たとえその人の苦手なあるいは嫌いな分野に及んだとしても、「大きな目標」の為に我慢してやり通して達成／習得するのに必要な「意欲」や「やる気」

がかきたてられ易いことである。（また、場合によっては、単なる「食わず嫌い」だった分野が好きになる可能性すらある。）そんな訳で、「大きな目標」を見据えながら、コツコツと「小さな目標」を一つずつ成し遂げていくスタイルは成功に結び付きやすい。

（４）人間は、大人も子供も、ドラマやゲーム、特に RPG（ロールプレイングゲーム）、が好きである。だったら、自分自身の人生をドラマや RPG に見立てて、自ら主人公になりきって日々の課題をクリアしていけば、モチベーションも上がるかも知れない。この時、（３）で述べた様な、どうしても達成したい「大きな目標」がある場合は、それを「ゴール」に見立てて、その為の「小さな目標」を途中での「課題」や「障害物」に見立てて、立派な行程表でも作って気分を高めれば良いかも知れない。

（５）**物事を記憶する際に、何かと関連付けて覚えるというのは常套手段である。**AKB グループのとある人気アイドルも、何百、何千人もいるファンの顔と名前を覚えるのに、各々のファンのエピソードや性格、イメージ等と一緒に覚えているという話を聞いたことがある。学校の勉強でも、例えば、日本政府（内閣）の組織図を丸ごと覚えた方が、各省庁の名前や役割を別々に覚えるよりも、恐らく覚えやすいし忘れにくい。また、英単語を覚える際も、似た意味の単語や反意語もついでに覚えた方が、結果的に忘れにくいし、より多くの単語を覚えられるので得である。更には、元素の周期表についても、（よくやられる様に）ゴロ合わせで覚えるのも結構であるが、それに加えて、例えば、表の縦に並ぶ一群の元素（例えば、IA 族、VIIB 族、 O 族等）を、その共通性質と伴に覚えれば、もっと忘れにくくなるだろう。

そして、以下に、現在の日本の教育システムでの「盲点」とも言える重要かつ有効な記憶の仕方を述べる。一言で言ってしまえば、**英語の知識**を加味するのである。

皆さんは恐らく、中学や高校の社会科のテストで、国際機関の略称、例えば GATT やユネスコ（UNESCO）等と、その（かなり長たらしい）日本語での正式名称を結びつける問題に出くわしたことがあるだろう。でも、このような問題は、英語圏の子供達には何の意味もない。何故なら、GATT や UNESCO 等は、単に英語での正式名称から各単語の頭文字を取って来ただけだからだ。（但し、「略称からフルネームを答えろ」という問題なら成立する。）逆に言えば、それを利用すれば、国際機関の略称と正式名称の対応は、（英語さえ理解＆記憶すれば）簡単につけられる。例えば：

[略称]　　[正式名称（英語）]　　[正式名称（日本語）]

GATT	General Agreement on Tariffs and Trades	関税貿易一般協定
ユネスコ (UNESCO)	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization	国連教育科学 文化機関
UNCTAD	United Nations Conference on Trade and Development	国連貿易 開発会議

こうして関連付けて覚えると、先ほどの対応づけを間違えることはほとんどなくなるし、更には、英単語も覚えられるので**「一石二鳥」**である。

　また、皆さんの中には、元素記号と元素名の対応を覚えるのに苦労した人々もおられるだろう。これも、元素名の英語を知っていれば、ほとんど苦労なくなる。例えば：

[日本語名]		[英語名]		[元素記号]
水素	→	hydrogen	→	H
酸素	→	oxygen	→	O
フッ素	→	fluorine	→	F
リン	→	phosphorus	→	P
硫黄	→	sulphur	→	S

といった具合である。これも、元素名と元素記号の対応だけでなく、その英語名も覚えられるので**「一石二鳥」**だ！！

[但し、中にはこのルールに従わない元素も幾つかあるから要注意である。例えば：

[日本語名]		[英語名]		[元素記号]
ナトリウム	→	sodium	$\not\to$	Na

カリウム	$\rightarrow$	potassium	$\not\twoheadrightarrow$	K
鉄	$\rightarrow$	iron	$\not\twoheadrightarrow$	Fe
銀	$\rightarrow$	silver	$\not\twoheadrightarrow$	Ag
金	$\rightarrow$	gold	$\not\twoheadrightarrow$	Au

等である。これらの元素記号は、ギリシャ語やラテン語、あるいはほかのヨーロッパ言語が由来らしい。]

もう一つ、英語の語彙力（ボキャブラリー、vocabulary）を飛躍的に増大させる**「秘策」**（別に隠している訳ではないが、、、）を教えよう。それは、常に英単語をその「構成要素」に分解するクセをつける事である。多くの英単語は、**「接頭辞＋語幹＋接尾辞」**に分けられ、**接頭辞**が意味を強めたりひっくり返したりの役割を果たし、**接尾辞**である単語から別の品詞の単語を作ったりする事ができたりする訳であるが、**語幹**自身もいくつかの**「構成要素」**に分けられる場合もある。例えば、日本語で「デヒドロゲナーゼ」と呼ばれる酵素の英語名は、dehydrogenase で、de- + hydrogen + -ase と分解され、de- で「取り除く」、hydrogen は「水素」[*46]、 -ase は「酵素」を意味するので、全体で「脱水素酵素」と訳せる。[ちなみに、「デヒドロゲナーゼ」は恐らくドイツ語由来の日本語読みで、英語では、「ディー**ハイ**ドロジェネイス」の様な発音になるハズなので要注意！！] 同様に、ホルモンの一種である「アドレナリン」は、英語では adrenaline で、ad- + renal + -ine と分解でき、ad- は（恐らく）「付加的な」「副次的な」とかそんな意味で、renal が腎臓に関連する形容詞、そして -ine で（恐らく）ホルモン等の化学物質を意味し、adrenal gland が「副腎」であることも知っていると、 adrenaline だけで、副腎から分泌されるホルモンである、という「予測」ができる（のでいちいちそれを暗記する必要がない）。

この様に、特に学術的な難しい物事を表現する英単語は、**ラテン語** や**ギリシャ語**由来の「構成要素」を幾つか組み合わせて産み出された単語が非常に多い。逆に言えば、その様な**ギリシャ語** や**ラテン語**について多く知っておけばおく程、新しく出くわした単語の意味の目星をつけやすくなる（し、実際、欧米の人々、特に研究者達、は大抵普段からそ

[*46] これも実は hydro + -gen と分解でき、hydro で「水」関連のものを指し、 -gen が「（何かの元となる）物質」を意味する。

うしている)。
日本語の場合、難しい語はたいてい漢字、もしくは漢字熟語で表現されるが、我々は漢字がいくつかの部首(「つくり」「へん」「かまえ」「かんむり」等々)に分解され、似た部首を持つ漢字は似た意味や発音を持っている事が多いことを(日常の)経験から知っているので、新しく出くわした漢字や漢字熟語でも(正確にとまではいかなくとも)何となく意味が推測できる事が多い。英語の場合もそれと同様であり、そこでは、日本語に対する中国語(漢字)の役割を、ギリシャ語やラテン語が果たしている、と言えるのである。
(だから、それを利用しない手はない!!)
また、この様に英単語を「構成要素」に分解するクセをつけておくと、必然的に、共通した構成要素を持つ単語同士をまとめて(あるいは関連付けて)憶える機会が生じ、更に記憶しやすく忘れにくくなる。
[**2020/12/15 追記:** 最近日本ではカタカナ英語が昔よりも頻繁に飛び交う様になって来たが、私は二つの理由でこれをお勧めしない。一つは、「英米人は決してそんな発音をしないゾ!」ということであり、もう一つは、ここで述べた様な「構成要素」への分解が分かりにくくなるからだ。英語はできる限りアルファベット表記する様、お勧めする。]

(6)人間はストーリーが好きな動物である。従って、覚えなければいけない物事をストーリーに埋め込んだり、ストーリー仕立てにする事により、憶えやすくなるかもしれない。(注:単なるストーリーではなく歌でも良い。)
私自身の経験を語ると、私は社会科の科目のうちで、地理や公民よりも歴史の方が好きだったし得意であった。これも、歴史の史実は年代順に並べられているので、それだけでストーリの要素が生まれる事もあるだろうし、様々な登場人物の活躍の裏には必ず何らかのストーリーが存在するものなので、興味を抱きやすく憶えやすい事が背景にあったのかも知れない。これを利用すると、例えば、地理におけるある地域の産業の発展や、公民におけるある政治制度の設立および発達の裏にあるいきさつや関係人物達の活躍等の「小歴史」をストーリー仕立てにして語り、その中に覚えるべき物事を埋め込んだりすれば、より憶えやすく忘れにくくなるかも知れない。
更に、私が小学生の頃からずっと理科が好きで得意たったのも、小学校低学年の頃から、様々な、子供向けに科学を説明した本や有名な科学者達の伝記等を読んで、科学に関する歴史やストーリーをよく知っていた事が、一つの要因だったかも知れない。これも、学校で理科を教える際にも、そういった科学にまつわる歴史やストーリーも一緒に織り込んで教える事により、単なる知識(事実)の羅列だけを教えるよりも身に付けさせやすくできるかも知れない。

以上が、私が今思いつく「物事を習得するコツ」に関して思った事である。要約すると：物事を習得したり成し遂げたりするには**「やる気」**や**「意欲」**をかきたてる事が不可欠である；それらなしで出来るのはせいぜい、自分の実力のレベルを大きく下回った物事だけであろう。そして、自分の（現時点の）実力を超えた事を成し遂げたり、新たな物事を習得してレベルアップを図ったりする際には、目標を細切れにしたり、関連する物事を一緒に覚えたりする等の工夫をして、自分の努力がはかどりやすくすると良い。

世の中では、上に述べた以外にも様々な「コツ」や「ノウハウ（know-how）」が（本などで）出回っていることと思うが、皆さんがそれらの中から自分に合った方法を適当に選択し、組み合わせて、自分自身の「望み」を遂げられる様に心より願っている。

2020/12/13（日）　江澤　潔

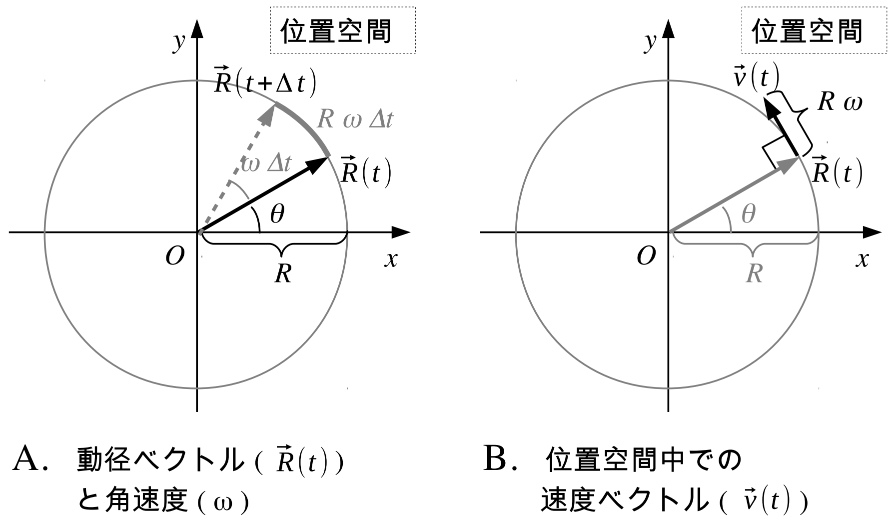


図 35　位置空間における（等速）円運動の動径ベクトル、角速度、および速度ベクトル。**A.** 動径ベクトル（$\vec{R}(t)$）と角速度（ω）。**B.** 速度ベクトル（$\vec{v}(t)$）は接線方向なので、動径ベクトルと直交する。

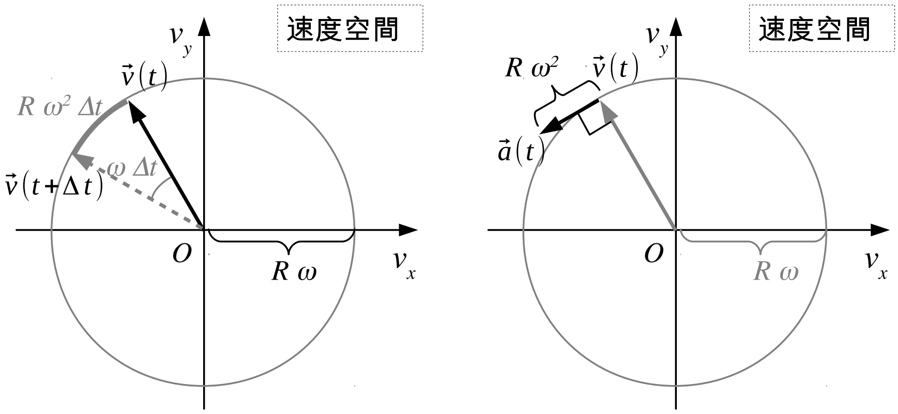
補　遺

補遺 A　等速円運動の加速度、$a_{\text{向心}} = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$、の初等的導出

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/17]

円運動、あるいはある「中心点」（O で表す）を基準とした運動、を記述するときによく**角速度**（ω（オメガ））を導入する。これは単位時間あたりに増える角度のことで、（微小）時間 Δt が経過する間に増えた（O を基準とした）角度は $\omega\ \Delta t$ で与えられる。すると、半径 R の等速円運動において時間 Δt の間に物体が描いた弧の長さは $R\ \omega\ \Delta t$ で与えられ（図 35 A)、$\Delta t \to 0$ の極限で、物体の速度は大きさが $(R\ \omega\ \Delta t)\ /\ \Delta t\ =\ R\ \omega$ で、その方向は接線方向、すなわち半径と垂直方法となる（図 35 B)。

その速度ベクトルの描く軌跡を 2 次元グラフにプロットすると、それも（半径 $R\ \omega$ の）等速円運動となり（図 36 A)、加速度は「速度の速度」なので、大きさが $a_{\text{向心}} = R\ \omega^2$ で向きは「速度ベウトル」が描く円の接線方向となる（図 36 B)。それは、もともとの位置ベクトル（即ち半径）$\vec{R}$（図 35 A または B）の「垂直の垂直」、つまり、半径と平行だが逆向きとなる（図 36 B)。



A. 速度ベクトル ($\vec{v}(t)$) とその増分　　B. 速度空間中での加速度ベクトル ($\vec{a}(t)$)

図 36　速度空間における等速円運動の速度ベクトルと加速度ベクトル。**A.** 速度ベクトル（$\vec{v}(t)$）とその増分。**B.** 加速度ベクトル（$\vec{a}(t)$）は接線方向なので、速度ベクトルと直交する。

ちなみに、円運動は周期 T で一周する、つまり、角度が 2π ラジアン（$= 360°$ ）増えるので、$\omega\, T \;=\; 2\pi$、即ち、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{63}$$

となり、従って加速度（の大きさ）は

$$a_{\text{向心}} \;=\; R\,\omega^2 \;=\; R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{64}$$

となる。

［ 導出終わり ］

[注] これも、位置（動径）ベクトルの極座標表示、$\vec{R} \;=\; R\,\vec{e}_R$、の 2 回時間微分を計算すれば、以下の様に形式的に導出できる*47。

まず、一般的に、中心点（O）を基準とした 2 次元平面内での運動では、

$$\begin{aligned} \vec{v} &\equiv \dot{\vec{R}} = \dot{R}\;\vec{e}_R + R\;\dot{\vec{e}}_R = \dot{R}\;\vec{e}_R + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad , \\ \vec{a} &\equiv \dot{\vec{v}} = \ddot{R}\vec{e}_R + 2\dot{R}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\;\dot{\vec{e}}_\theta \\ &= (\ddot{R} - R(\dot{\theta})^2)\vec{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \end{aligned} \tag{65}$$

*47　見やすくする為、ここで時間微分のドット表示、$\dot{A}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}A(t)$、を用いた。

が成立する。[ただし、上記で、$\vec{v}$ は速度ベクトル、$\vec{a}$ は加速度ベクトル、$R = |\vec{R}|$ は動径ベクトルの大きさ（つまり中心点（O）から物体までの距離)、$\vec{e}_R$ は動径方向の単位ベクトル、$\vec{e}_\theta$ は角度（θ）が増す方向の単位ベクトル（$\vec{e}_R$ と直交する）であり、基本的な関係式、$\dot{\vec{e}}_R \;=\; \dot{\theta}\;\vec{e}_\theta$ および $\dot{\vec{e}}_\theta \;=\; -\,\dot{\theta}\;\vec{e}_R$、を用いた。]

この一般式 (式 (65)) に等速円運動で成立する式、$\dot{R} = \ddot{R} = 0$、$\dot{\theta} \;=\; \omega$、および $\ddot{\theta} = 0$、を代入すると、加速度ベクトルは、

$$\vec{a}\;(=\dot{\vec{v}} \;=\; \ddot{\vec{R}}) \;=\; -R\omega^2\;\vec{e}_R \tag{66}$$

となり、初等的な導出法と同じ結果が機械的に得られる。

こういった形式的な導出は、慣れてしまえば非常に便利で強力な武器となり得る。が、その一方で、こういう数式の形式的操作に拘泥してしまうと、「問題の本質」を見失う恐れが大いにあるので注意が必要である。その為、前述の様に「問題の本質」を捉えた初等的な、あるいは直感的な、導出法も知っておくと、応用の範囲が飛躍的に広がる可能性がある。

補遺 B　円の接戦は接点を共有する半径と直交することの証明

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/18-19]

証明（？）1

まず、直線が円周と 2 つの点（A、B とする）で交わる場合（図 37 A)、円の中心（O）とのあいだに二等辺三角形、$\triangle OAB$、ができる。この時、$OA = OB$ より、

$$m\angle OAB = m\angle OBA = \alpha < \pi/2$$

が常に成り立つ。[注：ここでは α は $m\angle OAB$ の略記。]

従って、もし、円周上のある一点 (A とする) を通る直線が、半径 OA と鋭角 ($\alpha < \pi/2$) で交わる場合（図 37 A)、上述と同様にして二等辺三角形が形成され、2 点で交わるのでその直線は接線ではない。

また、もし鈍角（$\beta > \pi/2$）で交わる場合（図 37 B)、その角の（半径 OA に対して）反対側では鋭角が形成されているので、同様にしてその直線は接線ではないと言える。

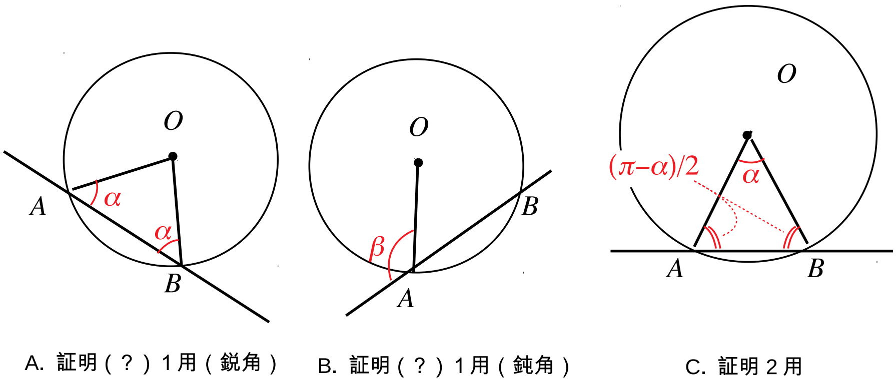


図 37　円の接線と半径が直交することの証明用の図。**A.** 証明（？）1 用（鋭角で交わる場合）。**B.** 証明（？）1 用（鈍角で交わる場合）。**C.** 証明 2 用。

従って、直線が円と接する、即ち、円周と一点（A とする）だけを共有する為には、半径（OA ）と直交する必要がある。

[証明（？） 1 終わり]

[筆者コメント] これは背理法っぽいが、どことなく不完全感があり、モヤモヤする。

証明 2

[これはいささかニュートン的な証明と言えるかも知れない。]

接点を、円周上の 2 点（A と B とする）で交わる直線の、A と B を限りなく近づけて一致させた時の極限として実現する。

2 つの半径、$\overline{OA}$ と $\overline{OB}$、の間の角度を $m\angle AOB = \alpha$ と略記すると（図 37 C)、直線と半径が交わる角度は、

$$m\angle OAB = m\angle OBA = (\pi - m\angle AOB)/2 = (\pi - \alpha)/2$$

例えば点 A で円周と接する接線は、点 B を点 A に限りなく近づけた極限、

$$\alpha \longrightarrow 0$$

で実現できる。その時、接戦と半径とが交わる角度は、上の結果を利用すると、

$$m\angle OAB = (\pi - \alpha)/2 \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \pi/2$$

よって、円の接線はその接点を共有する半径と直交する。

[証明 2 終わり]

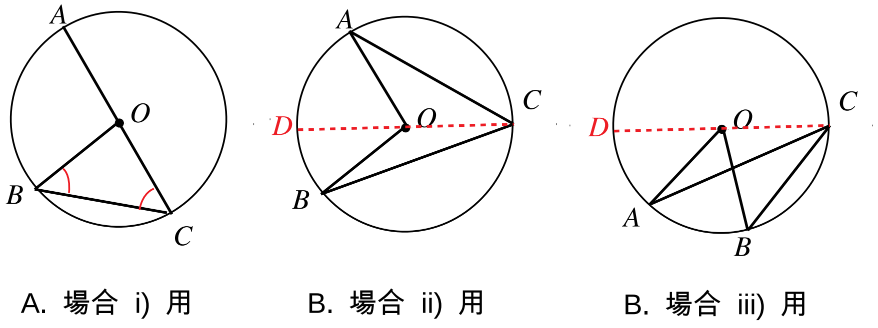


図 38　**中心角と円周角の間の関係。A.** 場合 i) 用。**B.** 場合 ii) 用。**C.** 場合 iii) 用。

補遺 C　中心角と円周角の間の関係の導出（証明）

江澤　潔　[手書き：2020/11/30; 電子文書化：2021/02/18-19]

ここでは、「完全自給自足」を期す為に、ある弦（$\overline{AB}$ とする）によって張られた中心角の角度が同じ弦によって張られた円周角の角度の 2 倍であることを証明する。

[注：以下に示す証明法は、標準的な教科書でよく見られるものであるので、既に知っている方は読み飛ばして頂いて構わない。]

以下、円周角を成す A、B 以外の円周上の点を C と表す。（従って、円周角は $\angle ACB$ と表される。）三つの場合に分けて考える。

i) 円周角を成す一辺（$\overline{AC}$）が円の中心（O）を通る場合（図 38 A）

先ず、$\triangle OBC$ は、$OB = OC$ の二等辺三角形であるので、

$$m\angle OBC = m\angle OCB = m\angle ACB$$

次に、$\triangle OBC$ の内角と外角の関係より、

$$m\angle AOB = m\angle OBC + m\angle OCB = 2\ m\angle ACB$$

上式の最左辺は弦 $\overline{AB}$ によって張られた中心角の大きさ、最右辺は同じ弦によって張られた円周角の大きさの 2 倍である。これはまさに、導出したい関係式である！

[証明 **i)** 終わり]

ii) 円の中心（O）が円周角（$\angle ACB$）の内側にある場合（図 38 B）

この時、補助線として、点 C を通る直径を引き、その反対側の端点を D とする。
先ず、弦 $\overline{AD}$ に対しては、i) の状況が成立するので、

$$m\angle AOD = 2\ m\angle ACD$$

又、弦 $\overline{BD}$ に対しても、i) の状況が成立するので、

$$m\angle DOB = 2\ m\angle DCB$$

上の 2 つの等式を辺々足し合わせると、

$$m\angle AOB = m\angle AOD + m\angle DOB = 2 \times (m\angle ACD + m\angle DCB) = 2\ m\angle ACB$$

[証明 **ii)** 終わり]

iii) 円の中心（O）が円周角（$\angle ACB$）の外側にある場合（図 38 C）

この場合も、補助線として、点 C を通る直径を引き、その反対側の端点を D とする。
先ず、弦 $\overline{DB}$ に対しては、状況 i) が成立するので、

$$m\angle DOB = 2\ m\angle DCB$$

又、弦 $\overline{DA}$ に対しても、状況 i) が成立するので、

$$m\angle DOA = 2\ m\angle DCA$$

1 番目の式から 2 番目の式を辺々引くと、

$$m\angle AOB = m\angle DOB - m\angle DOA = 2 \times (m\angle DCB - m\angle DCA) = 2\ m\angle ACB$$

[証明 **iii)** 終わり]

補遺 D　ガンマ関数とベータ関数

江澤　潔　[手書き：2020/12/06; 電子文書化：2021/02/27-03/01]

ガンマ関数、$\Gamma(x)$、とベータ関数、$B(x,y)$、は微積分を用いた数学解析の問題に頻出する重要な関数である。ここでは、それらの定義と性質をおさらいしておく。[*48]

D.1　定義

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\ t^{x-1} e^{-t} \tag{67}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 dt\ t^{x-1}(1-t)^{y-1} \tag{68}$$

D.2　ガンマ関数の性質

（1）$\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$　（$x > 0$ に対して）

[証明]

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty dt\ t^x e^{-t} = \int_0^\infty dt\ t^x \frac{d}{dt}(-e^{-t}) \\ &= [-t^x e^{-t}]\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty dt\ \frac{d}{dt}(t^x)\ e^{-t} \\ &= \quad 0 \quad + \int_0^\infty dt\ x t^{x-1} e^{-t} = x\Gamma(x)\end{aligned} \tag{69}$$

[証明終わり]

（2）$\Gamma(1) = 1$；　正の整数 n に対し、$\Gamma(n+1) = n!$　$[= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1]$

[証明]

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\ t^{1-1} e^{-t} = \int_0^\infty e^{-t} = [-e^{-t}]\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1\ ;$$

*48　ここでは x と y は正の実数としておくが、解析接続によって（0 と負の整数値を除いた）全複素平面上に定義を拡張できるハズである。

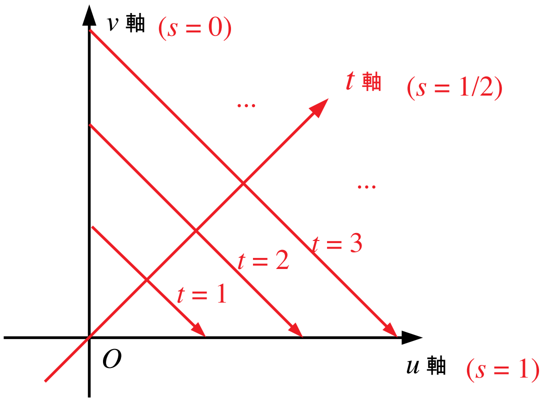


図 39　ベータ関数をガンマ関数の関係を導出する際に使う積分変数変換 。赤で示したのは、新しい積分変数、s と t、に関するもの。

$$\Gamma(n+1) \overset{(1)}{=} n\,\Gamma(n) \overset{(1)}{=} n\cdot(n-1)\Gamma(n-1) \overset{(1)}{=} \cdots \overset{(1)}{=} n\cdot(n-1)\cdots 1\cdot[\Gamma(1)=1] = n!$$

［ 証明終わり ］

（３） $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$；　正の整数 n に対し、$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

［ 証明 ］まず、最初の等式で積分変数を $p = t^{1/2}$ と置き換えると（$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}t^{(1/2)-1}$ なので）、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dt\; t^{(1/2)-1}e^{-t} = \int_0^\infty 2dp\; e^{-p^2} = 2\int_0^\infty dp\; e^{p^2} = \sqrt{\pi}$$

ここで一番最後の等式は、補遺 E で導出される。次に、

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \overset{(1)}{=} \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \overset{(1)}{=} \cdots \overset{(1)}{=} \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

［ 証明終わり ］

D.3　ベータ関数をガンマ関数の関係

（４）

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

［ 証明 ］

まず、ガンマ関数の積を、

$$\Gamma(x)\ \Gamma(y) = \int_0^\infty du\ u^{x-1} e^{-u} \int_0^\infty dv\ v^{y-1} e^{-v} = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv\ u^{x-1} v^{y-1} e^{-(u+v)} \tag{70}$$

と変形し、次に、積分変数、u と v、を

$$\begin{cases} u = t\ s \\ v = t\ (1-s) \end{cases} \qquad \left[\text{つまり、} \begin{cases} t = u + v \\ s = u/t \end{cases} \right]$$

と、新たな変数、t と s、に置き換える（図 39 参照）。この時、

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} s & 1-s \\ t & -t \end{vmatrix} = -t$$

従って、式（70）は更に変形できて、

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\ \Gamma(y) &= \int_0^\infty dt \int_0^1 ds\ t\ (ts)^{x-1} (t(1-s))^{y-1}\ e^{-t} = \int_0^\infty dt \int_0^1 ds\ t^{x+y-1}\ s^{x-1} (1-s)^{y-1}\ e^{-t} \\ &= \int_0^\infty dt\ t^{x+y-1} e^{-t} \times \int_0^1 ds\ s^{x-1} (1-s)^{y-1} = \Gamma(x+y)\ B(x,y) \end{aligned}$$

この等式は、求めたい関係式（４）と同等である。

［ 証明終わり ］

D.4　ベータ関数の性質

（５） $B(x,y) = B(y,x)$ 　（$x, y > 0$ に対して）

［ 証明 ］

$B(x,y)$ の定義の式で、積分変数を t から $s = 1 - t$ に置き換えると、

$$B(x,y) = \int_1^0 (-ds)\ (1-s)^{x-1} s^{y-1} = \int_0^1 ds\ s^{y-1} (1-s)^{x-1} = B(y,x)$$

［ 証明終わり ］

（６） （$x, y > 0$ に対して、）$xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$

［ 証明１ ］

$$xB(x,y+1) = \int_0^1 dt\ xt^{x-1} (1-t)^y = \int_0^1 dt\ \frac{d}{dt}(t^x)(1-t)^y$$

$$= [t^x(1-t)^y]|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 dt\ t^x \frac{d}{dt}((1-t)^y)$$
$$= \quad 0 \quad + y\int_0^1 dt\ t^x(1-t)^{y-1} = yB(x+1,y)$$

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］

ベータ関数とガンマ関数の関係を用いて、

$$xB(x,y{+}1) = \frac{x\Gamma(x)\ \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} = \frac{\Gamma(x+1)\ \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} = \frac{\Gamma(x+1)\ y\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} = yB(x{+}1,y)$$

［ 証明２終わり ］

（７）（$x > 0$ に対して、）$B(x,1) = 1/x$

［ 証明 ］

$$B(x,1) = \int_0^1 dt\ t^{x-1}(1-t)^{1-1} = \int_0^1 dt\ t^{x-1} = \left[\frac{1}{x}t^x\right]\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x}$$

［ 証明終わり ］

（８）（正の整数 n、m に対して、）$B(n,m) = \frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(n+m-1)!}$

［ 証明１ ］[*49]

$$B(n,m) \overset{(4)}{=} \frac{\Gamma(n)\ \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \overset{(2)}{=} \frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(n+m-1)!}$$

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］

$$B(n,m) \overset{(6)}{=} \frac{m-1}{n}B(n+1,m-1) \overset{(6)}{=} \cdots \overset{(6)}{=} \frac{(m-1)\cdot(m-2)\cdots 1}{n\cdot(n+1)\cdots(n+m-2)}B(n+m-1,1)$$
$$\overset{(7)}{=} \frac{(m-1)!}{n\cdot(n+1)\cdots(n+m-2)\cdot(n+m-1)} = \frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(n+m-1)!}$$

*49 以後、$\overset{(X)}{=}$ は、等式を示すのに性質（X）を用いたことを意味することとする。

[証明２終わり]

（９） （正の整数 n および $\alpha > 0$ に対して、）$B(\alpha, n) = \frac{(n-1)!}{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$

[証明]

$$B(\alpha, n) \overset{(4)}{=} \frac{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} \overset{(1)(2)}{=\!=\!=} \frac{\Gamma(\alpha)\ (n-1)!}{(\alpha+n-1)\cdots\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{(n-1)!}{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

[証明終わり]

（１０） （非負の整数 m に対して、）

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma(2m+1) = 2^{2m}\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma(m+1)$$

[注：ちなみにこの式は、 定理 6.8 の証明（導出）の際に用いた積分 I_k の二つの導出結果が同等であることを示す際に登場した。]

[証明]

$$\begin{aligned} 2^{2m}\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma(m+1) &\overset{(2)(3)}{=\!=\!=} 2^{2m}\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times m! \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 1}{2^m}\times 2^{2m}\times m! \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 1\times 2^m m! \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 1\times(2m)\cdot(2m-2)\cdots 2 \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ (2m)! \overset{(2)}{=} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma(2m+1) \end{aligned}$$

[証明終わり]

補遺 E　ガウス積分の導出

江澤　潔　[手書き：2020/12/06-07; 電子文書化：2021/03/07-09]

ガウス（Gauss）積分、およびその一般化と修正は、恐らく数理科学の分野で最も頻繁に使われる積分である。ここで、ガウス積分の性質およびその導出法をおさらいする。

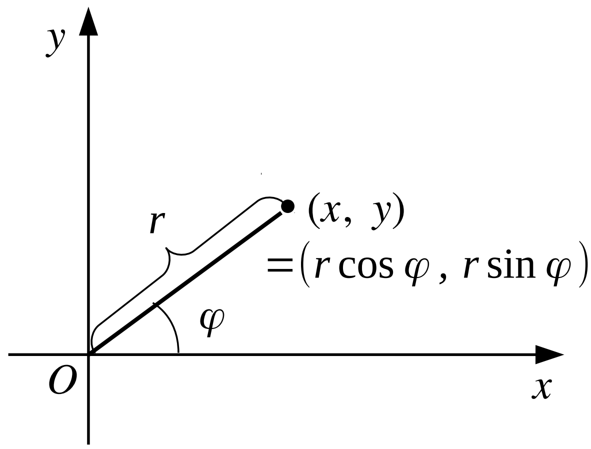


図 40　（ガウス積分を計算する際に用いられる）２次元平面の極座標。

E.1　単変数ガウス積分

E.1.1　基本

$$a > 0 \quad \text{の時} \quad \int_0^\infty dx\; e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

[導出]

$G(a) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty dx\; e^{-ax^2}$ と置くと、

$$\{G(a)\}^2 = \int_0^\infty dx\; e^{-ax^2} \int_0^\infty dy\; e^{-ay^2} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-a(x^2+y^2)}$$

ここで図 40 の様に、極座標 (r, φ) を導入すると、$(x,\ y) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$（$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < \pi/2$）[*50] となるので、ヤコビアンは、

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

よって、

$$\begin{aligned} \{G(a)\}^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi\; r\; e^{-ar^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty dr\; \frac{-1}{2a}\frac{d}{dr}(e^{-ar^2}) \\ &= -\frac{\pi}{4a}e^{-ar^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

---

*50　今必要なのは第一象限（$x,\ y > 0$）のみなので、φ の上限は $\pi/2$ となる。

即ち、

$$G(a) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

［ 導出終わり ］

［ 注：私はこの導出法以外は見た事がない。もし違う導出法を知っている人がいたら教えて欲しい。］

E.1.2　モーメント

正の整数 m に対し：

- $$\int_0^\infty dx\ x^{2m} e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{m+\frac{1}{2}}} \times \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2} \quad ,$$
- $$\int_0^\infty dx\ x^{2m-1} e^{-ax^2} = \frac{(m-1)!}{2a^m} \quad .$$

［ 導出１ ］

正の整数 n に対し、$G_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dx\ x^n e^{-ax^2}$ と置くと、

$$\begin{aligned} G_n(a) &= \int_0^\infty dx\ x^{n-1} \frac{-1}{2a} \frac{d}{dx}(e^{-ax^2}) \\ &= \frac{-1}{2a} x^{n-1} e^{-ax^2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty dx\ \frac{d}{dx}(x^{n-1})\ \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \\ &= \frac{1}{2a}\delta(n,1) + \left\{ \begin{array}{cc} \frac{n-1}{2a} \int_0^\infty dx\ x^{n-2} e^{-ax^2} & \text{if} \quad n \geq 2 \\ 0 & \text{if} \quad n = 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2a}\delta(n,1) + \frac{n-1}{2a}\ G_{n-2}(a) \quad 。 \end{aligned} \tag{71}$$

ここで、$\delta(i,j) = 1$ （ $i = j$ の時）、 $= 0$（ $i \neq j$ の時）はクロネッカーのデルタと呼ばれる。また、（あくまで便宜上、）$G_{-1}(a) = 0$ としておく。

この漸化式（71）を繰り返し用いて、$m > 0$ に対し、

$$G_{2m}(a) = \frac{2m-1}{2a} G_{2m-2}(a) = \cdots = \frac{2m-1}{2a} \cdot \frac{2m-3}{2a} \cdots \frac{1}{2a} G_0(a)$$

この最右辺を整理し、また、$G_0(a) = G(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを用いると、

$$G_{2m}(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2} \quad ;$$

一方、

$$G_{2m-1}(a) = \frac{2m-2}{2a}\ G_{2m-3}(a) = \cdots = \frac{2m-2}{2a} \cdot \frac{2m-4}{2a} \cdots \frac{2}{2a}\ G_1(a)$$

この最右辺を整理し、また、$G_1(a) = \frac{1}{2a}$ であることを用いると、

$$G_{2m-1}(a) = \frac{m-1}{a} \cdot \frac{m-2}{a} \cdots \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{(m-1)!}{2a^m} \quad 。$$

［導出１終わり］

［導出２］ $y = ax^2$ と置くと、$x = \sqrt{\frac{y}{a}}$ および $\frac{dx}{dy} = \frac{y^{-1/2}}{2\sqrt{a}}$ より、

$$G_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} = \int_0^\infty \frac{dy\ y^{-1/2}}{2\sqrt{a}} \ \left(\frac{y}{a}\right)^{n/2} e^{-y} = \frac{1}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty dy\ y^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-y}$$

最右辺の積分が $\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$ であることを用いると、次式を得る：

$$G_n(a) = \frac{1}{2a^{\frac{n+1}{2}}}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) \quad 。$$

この式と、補遺 D におけるガンマ関数の性質（２）&（３）を用いると、$n = 2m$ の場合、

$$G_{2m}(a) = \frac{1}{2a^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2a^{m+\frac{1}{2}}} \left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right] \quad ;$$

また、$n = 2m-1$ の場合、

$$G_{2m-1}(a) = \frac{1}{2a^m}\ \Gamma(m) = \frac{1}{2a^m}(m-1)! \quad 。$$

［導出２終わり］

E.1.3 モーメントの一般化

正の実数 β に対し、

$$\int_0^\infty dx\ x^\beta e^{-ax^2} = \frac{1}{2a^{\frac{\beta+1}{2}}}\ \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)$$

［導出］

$y=ax^2$ と置くと、、$x=\sqrt{\frac{y}{a}}$ および $\frac{dx}{dy}=\frac{y^{-1/2}}{2\sqrt{a}}$ より、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx\ x^\beta e^{-ax^2} &= \int_0^\infty dy \frac{y^{-1/2}}{2\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{y}{a}\right)^{\beta/2} e^{-y} \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{\beta+1}{2}}}\int_0^\infty dy\ y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-y} \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{\beta+1}{2}}}\ \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \quad 。\end{aligned}$$

[導出終わり]

E.1.4 [応用問題] 単位超球体の「超表面積」

n 次元超球体の「超体積」および「超表面積」の公式は、既に小節 6.5 で導出しているが、ここで扱ったガウス積分を用いるともっと簡単に導出できる。そのためには、n 次元におけるガウス積分：

$$\int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \cdots \int_0^\infty dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$$

を、二通りの仕方で計算する。まず、「正攻法」で計算すると、

$$\int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty dx_2 \cdots \int_{-\infty}^\infty dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = \left[\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2}\right]^n = \left[2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1}}\right]^n = (\pi)^{n/2} \quad 。$$

もう一つは、n 次元の極座標を用いるが、「角度部分」の積分はトリビアルに実行でき、それは単位超球体の「超表面積」、$A^{(n)}_{\text{超球体}}(1)$、で与えられるハズであり、一方、「動径部分」の積分測度は $r^{n-1}dr$ となるハズなので、全体の積分は：

$$\int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty dx_2 \cdots \int_{-\infty}^\infty dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = A^{(n)}_{\text{超球体}}(1)\int_0^\infty r^{n-1}dr\ e^{-r^2} = A^{(n)}_{\text{超球体}}(1)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

ここで最後の等式では、E.1.3 の結果を用いた。この二つの結果を等式で結んで少し整理すると：

$$A^{(n)}_{\text{超球体}}(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

一般の半径 R の超球体の「超表面積」は、相似な図形の $n-1$ 次元測度の性質を用いて：

$$A^{(n)}_{\text{超球体}}(R) = R^{n-1}\times A^{(n)}_{\text{超球体}}(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ R^{n-1}$$

これは定理 6.9 の結果と一致する！！

更に、この結果より、n 次元超球体の「超体積」も（小節 6.5 と逆の手続きで）導出できる：

$$V^{(n)}_{\text{超球体}}(R) = \int_0^R dr\ A^{(n)}_{\text{超球体}}(r) = \frac{1}{n}\ \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\ R^n$$

当然ながら、これは定理 6.8 の結果と一致する！！

E.2 多変数ガウス積分

E.2.1

正定値を持つ $n \times n$ の実対称行列、$\boldsymbol{A} = (A_{ij})$（$A_{ij} = A_{ji}$）に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j\right) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}$$

[導出]

$\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ とすると、$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{ij} x_j = \vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t$ と表せる[*51]。線形代数の定理により、正定値の実対称行列 $\boldsymbol{A}$ は必ず、適当な実直交行列 $\boldsymbol{T}$（$\boldsymbol{T}\ \boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{I}$、ここで $\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ ,...,\ 1)$ は[*52] $n \times n$ 単位行列）を用いて対角化できる[*53]：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{\Lambda}\ \boldsymbol{T}^t \quad , \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n) \quad , \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n > 0$$

これから直ちに、

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

となる。また、ここで新たな積分変数、

$$\vec{x'} \quad (= (x'_1,\ x'_2,\ ...,\ x'_n)) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}\ \boldsymbol{T}$$

を用いると、

$$\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t = \vec{x'}\boldsymbol{\Lambda}(\vec{x'})^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2$$

---

*51 ここで ^{t} は行列の転置を表す。例えば $n \times m$ 行列、$\boldsymbol{M} = (M_{ij})$ の転置行列は、$m \times n$ 行列、$\boldsymbol{M}^t = (M_{ji})$ となる。また、行ベクトル $\vec{x}$ の「転置行列」、$\vec{x}^t$ 、は列ベクトルとなる。

*52 ここで、記号、$\mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$、は、対角成分が $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ である様な、$n \times n$ の対角行列を表す。

*53 この定理の証明に関しては、記憶があやふやなので割愛。（ちょっと難しかった印象だけは記憶にある。）興味ある方は、線形代数の教科書か参考書等をご参照願いたい。

一方、

$$\left|\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)}{\partial(x'_1,\ x'_2,\ ...,\ x'_n)}\right| = \left|\det(\boldsymbol{T}^{-1})\right| = 1$$

従って、問題の多重積分は、次の様に計算できる：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda (x'_i)^2\right) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 e^{-\lambda_1 (x'_1)^2}\right] \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'_n e^{-\lambda_n (x'_n)^2}\right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}}\ \cdots \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}
\end{aligned}$$

［導出終わり］

E.2.2　分散と共分散

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ x_i x_j\ \ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \quad = \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}$$

［導出１］

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \quad = \quad -2\left(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_k\right) \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$

より、

$$x_j\ \ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \quad = \quad \frac{-1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$

これを用いると、公式の左辺の積分は、（部分積分を用いて、）

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ x_i x_j\ \ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ x_i \left[\frac{-1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl}\ \frac{\partial}{\partial x_l} \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \left[\frac{+1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl}\ \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right] \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)
\end{aligned}$$

この最右辺は、$\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta(i,l)$ を用いると、更に変形できて、

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \left[\frac{+1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} \ \delta(i,l) \right] \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \\
&= \frac{1}{2} (\boldsymbol{A}^{-1})_{ji} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \\
&= \frac{1}{2} (\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} \qquad (72)
\end{aligned}
$$

［導出１終わり］

［導出２］

まず、$i \neq j$ の場合を考えると、:

$$
（公式左辺の積分）= \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t) \right]
$$

小小節 E.2.1 の結果より、

$$
（公式左辺の積分）= \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left[\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} \right] \quad = \quad -\frac{\pi^{n/2}}{2} \left[\frac{-1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \det \boldsymbol{A}}{(\det \boldsymbol{A})^{3/2}} \right]
$$

これも線形代数の定理により、$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \det \boldsymbol{A}$ は、要素 A_{ij} の余因子となり、次式が成立する[*54]：

$$
\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \det \boldsymbol{A} = 2 \, (\det \boldsymbol{A}) \ (\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}
$$

ここで左辺の因子 2 は、行列 $\boldsymbol{A}$ が対象であり、非対角成分が 2 度現れることに起因する。この結果を上記の最右辺に代入すると：

$$
（公式左辺の積分）= \quad -\frac{\pi^{n/2}}{2} \left[\frac{-1}{2} \times \frac{2 \, (\det \boldsymbol{A}) \ (\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}}{(\det \boldsymbol{A})^{3/2}} \right] \quad = \quad \frac{1}{2} (\boldsymbol{A}^{-1})_{ij} \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}
$$

次に、$i = j$ の時は、対象行列でも対角成分は各々一度しか現れないので、最初の $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{ij}}$ が $-\frac{\partial}{\partial A_{ii}}$ となり、その一方で、

$$
\frac{\partial}{\partial A_{ii}} \det \boldsymbol{A} = (det \boldsymbol{A}) \ (\boldsymbol{A}^{-1})_{ii}
$$

と、因子 2 が消えるので、それらが相殺し合い、結局公式は成立する。［導出２終わり］

[*54] この証明も（「余因子」の説明と伴に）割愛。興味ある方は、線形代数の教科書か参考書等をご参照願いたい。

E.2.3　４次のモーメント

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; x_i x_j x_k x_l \;\; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}(\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{il}(\boldsymbol{A}^{-1})_{jk}\right] \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}$$

［ 導出１ ］

小小節 E.2.2 の［ 導出 1 ］と同様にして、

（公式左辺の積分）

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; x_i x_j x_k \left[\frac{-1}{2} \sum_{m=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{lm} \frac{\partial}{\partial x_m} \;\; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \;\; \left[\frac{+1}{2} \sum_{m=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_{lm} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i x_j x_k)\right] \; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \;\; \left[(\boldsymbol{A}^{-1})_{li} \; x_j x_k + (\boldsymbol{A}^{-1})_{lj} \; x_i x_k + (\boldsymbol{A}^{-1})_{lk} \; x_i x_j\right] \; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$= \frac{1}{2} \Bigg[(\boldsymbol{A}^{-1})_{il} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; x_j x_k \;\; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$+ (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; x_i x_k \;\; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$+ (\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; x_i x_j \;\; \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)\Bigg]$$

最右辺に現れた三つの積分は、まさしく小小節 E.2.2 の左辺（の添字を置き換えたもの）であるから、その右辺を代入すると、

（公式左辺の積分）

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[(\boldsymbol{A}^{-1})_{il}(\boldsymbol{A}^{-1})_{jk} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ik} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}\right] \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}$$

これはまさしく公式右辺に他ならない。

［ 導出１終わり ］

［ 導出２ ］

先ず、i と j と k と l がすべて互いに異なる場合を考える。小小節 E.2.2 の［ 導出２ ］と同様にして、

$$\begin{aligned}&（公式左辺の積分）\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial A_{ij}\ \partial A_{kl}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)\right] \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left\{\frac{\partial}{\partial A_{kl}} \left[\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\right]\right\}\end{aligned}$$

ここで、小小節 E.2.2 の［ 導出２ ］の結果を用いると、

$$（公式左辺の積分）= \quad -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\right\}$$

これは、A_{ij} に関する偏微分を $\{...\}$ の間の二つの因子に各々作用させて、更に、小小節 E.2.2 の［ 導出２ ］の結果を用いて、次の様に書き換えられる：

$$\begin{aligned}&（公式左辺の積分）\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\right] \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\right] \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}\ \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} \qquad (73)\end{aligned}$$

ここで、最右辺の第一項に現れる $\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}$ を計算する。まず、$\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ は実対称行列なので、非対角成分は二度出現する（即ち $A_{ij} \equiv A_{ji}$）ことを考慮すると、以下の恒等式が成立する：

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} A_{kl} \equiv \begin{cases} \delta(i,\ k)\ \delta(j,\ l) + \delta(i,\ l)\ \delta(j,\ k) & \text{if} \quad i \neq j \quad , \\ \delta(i,\ k)\ \delta(i,\ l) & \text{if} \quad i = j \quad . \end{cases}$$

次に、$(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}$ の「定義式」、$\sum_{m=1}^{n} A_{km}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ml} = \delta(k,l)$、の両辺を A_{ij} で偏微分すると、右辺は当然ゼロとなるので、$i \neq j$ の時には、以下の様になる：

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{m=1}^{n}\left[\{\delta(i,\ k)\ \delta(j,\ m) + \delta(i,\ m)\ \delta(j,\ k)\}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\right] + \sum_{m=1}^{n}\left[A_{km}\ \frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\right] \\ &= \delta(i,\ k)(\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + \delta(j,\ k)(\boldsymbol{A}^{-1})_{il} + \sum_{m=1}^{n}\left[A_{km}\ \frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\right]\end{aligned}$$

ここで、添字 k を k' に置き換えて、両辺に $(\boldsymbol{A}^{-1})_{k'k}$ を掛けて $k' = 1$ から $k' = n$ までの和を取ると、

$$0 = (\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{jk}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{il} + \sum_{m=1}^{n}\left[\delta(k,\ m)\ \frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ml}\right]$$

$$= (\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{jk}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{il} + \frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}$$

即ち、$i \neq j$ の時は、

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} = -\left[(\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{jk}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{il}\right]$$

となる。ついでながら、$i = j$ の時も同様にして計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial A_{ii}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} = -(\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{il}$$

となる。

この、$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}$ の $i \neq j$ の時の表現を式（73）に代入すると、

$$\begin{aligned}&（公式左辺の積分）\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{A}^{-1})_{ik}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{jl} + (\boldsymbol{A}^{-1})_{jk}\ (\boldsymbol{A}^{-1})_{il}\right\}\right]\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\\ &\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}\ \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\end{aligned}$$

この右辺を整理してまとめると、求めるべき公式となる。

もしも、i、j、k、l のいずれかが等しい時は、小小節 E.2.2 の［ 導出２ ］の最後でやった様に、因子 2 や 1/2 の違いを考慮して、更に、$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}$ の $i = j$ の時の表現を用いたりすれば、やはり同じ公式が導けるハズである。

［ 導出２終わり ］

大抵の問題は、小小節 E.2.2 の分散、共分散、と小小節 E.2.3 の 4 次のモーメントを計算すれば事足りるのであるが、一応、更に一般化できることを知っておくのも悪くない。

E.2.4　一般の次数のモーメント

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}\ \ \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \left[\sum_{(p_1,\ q_1),\ \dots,\ (p_m,\ q_m)\in P^{(m)}[1,\ 2,\ \dots,\ 2m-1,\ 2m]} (\boldsymbol{A}^{-1})_{i_{p_1}i_{q_1}}\cdots(\boldsymbol{A}^{-1})_{i_{p_m}i_{q_m}}\right]\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\end{aligned}$$

ただしここで、総和の範囲を定める部分に登場する $P^{(m)}[1,\ 2,\ \ldots,\ 2m-1,\ 2m]$ は、数、$1,\ 2,\ \ldots,\ 2m-1,\ 2m$、を$m$ 組のペア、$(p_1,\ q_1),\ \ldots,\ (p_m,\ q_m)$、に分ける全てのやり方の集合である。（そのようなやり方は、$\frac{(2m)!}{2^m m!} = (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 1$ 通りある。）

［ちなみに、ここでは、変数が偶数個の場合のモーメントのみ記しているが、奇数個の場合は、対称性よりゼロとなることが自明である。］

[導出１]

小小節 E.2.3 の [導出１] のやり方を繰り返す。（m に関する数学的帰納法を用いても良い。）

[導出１終わり]

[導出２]

$$\text{（公式左辺の積分）} = \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial A_{i_1 i_2}\cdots\partial A_{i_{2m-1} i_{2m}}} \left[\frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}\right]$$

の計算を小小節 E.2.3 の [導出２] と同様にを繰り返す。（m に関する数学的帰納法を用いても良い。）

[導出２終わり]

E.2.5　モーメントの母関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \ \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\ x_k\right)\cdot \exp(-\vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_k(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\ f_l\right)\cdot \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}$$

[導出]

$\vec{f} = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$ とすると、

$$\text{（公式左辺の積分）} = \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \ \exp\left(\vec{f}(\vec{x})^t - \vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t\right)$$

右辺の指数因子は（二次方程式の解の公式を求める時の様に）平方完成でき、

$$\vec{f}(\vec{x})^t - \vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t = -\left(\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\left(\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}\right)^t + \frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t$$

ここで、$\vec{x'} = (x'_1,\ ...,\ x'_n) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}$ と置くと、変数変換、$\vec{x} \longrightarrow \vec{x'}$ は、単なる原点の移動に相当するので、

$$\frac{\partial(x_1,\ ...,\ x_n)}{\partial(x'_1,\ ...,\ x'_n)} = 1$$

また、

$$\vec{f}(\vec{x})^t - \vec{x}\boldsymbol{A}(\vec{x})^t = -\vec{x'}\boldsymbol{A}(\vec{x'})^t + \frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t$$

と書き換えられるので、

$$\begin{aligned}(\text{公式左辺の積分}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_n\ \exp\left(-\vec{x'}\boldsymbol{A}(\vec{x'})^t + \frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_n\ \exp\left(-\vec{x'}\boldsymbol{A}(\vec{x'})^t\right)\end{aligned}$$

最右辺の積分は、まさに、小小節 E.2.1 の公式左辺に他ならないので、その公式を用いると、

$$(\text{公式左辺の積分}) = \quad \exp\left(\frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right)\cdot\frac{\pi^{n/2}}{(\det\boldsymbol{A})^{1/2}}$$

これは正に求めるべき公式である。

[導出終わり]

ちなみに、小小節 E.2.5 の公式を用いると、小小節 E.2.4 の公式はもっと機械的（すなわち形式的）に導出できる。まず、

$$(\text{小小節 E.2.4 の左辺}) = \quad \frac{\partial^{2m}}{\partial f_{i_1}\partial f_{i_2}\cdots\partial f_{i_{2m-1}}\partial f_{i_{2m}}}(\text{小小節 E.2.5 の左辺})\Bigg|_{f_1=\cdots=f_n=0}$$

はすぐに示せるので、この右辺に小小節 E.2.5 の公式を代入して、

$$(\text{小小節 E.2.4 の左辺}) = \quad \frac{\partial^{2m}}{\partial f_{i_1}\partial f_{i_2}\cdots\partial f_{i_{2m-1}}\partial f_{i_{2m}}}\exp\left(\frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right)\Bigg|_{\vec{f}=\vec{0}}\cdot\frac{\pi^{n/2}}{(\det\boldsymbol{A})^{1/2}}$$

この右辺の $2m$ 解偏微分を計算すれば、小小節 E.2.4 の公式右辺になることが示せる。[*55]

これは、確率分布の**母関数（generating function）** の威力をまざまざと見せつけた例といえよう。このように、確率分布の母関数が求められると、大抵のモーメントの計算は楽になる。

補遺 F　直角三角形と直角三角錐の境界、法線、接線、およびそれらにおけるガウスとストークスの定理

江澤　潔　[手書き：2020/12/07-10; 電子文書化：2021/03/01-07]

直方体や長方形だけでなく、直角三角形、直角三角柱、そして直角三角錐も用いると、7 節で行なった様な、一般化されたストークスの定理の特殊ケースの直観的導出における対象領域の近似はより滑らかになる。また、ここで示す証明法を少し修正すれば、一般の領域での直接の証明も不可能ではない！！という訳で、直角三角形（および直角三角柱)、そして直角三角錐（あるいはその境界面）における三次元版ガウスの定理（定理 7.3）および狭義のストークスの定理（定理 7.4）のいささか直観的な証明をここで与えておく。
[注：　ここでは証明をわかりやすくする為に、直角の頂点を原点に置いたが、もっと一般の $(X,\ Y,\ Z)$ 点に置いても証明は本質的に同様に行える。]

F.1　直角三角形

図 41 の様な直角三角形 R ：

$$\left\{\ (x,y)\quad|\quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1\ \right\}$$

の境界（∂R）およびその法線 $\vec{n}$ は、以下の三つの線分から成る。

$$\left[\begin{array}{lclll} x\text{ 軸上の } l_x & : & \text{長さ } a, & \{\ (t,\ 0)\ \mid\ 0\leq t\leq a\ \}, & \vec{n}=(0,\ -1)\quad ; \\ y\text{ 軸上の } l_y & : & \text{長さ } b, & \{\ (0,\ b-t)\ \mid\ 0\leq t\leq b\ \}, & \vec{n}=(-1,\ 0)\quad ; \\ \text{直線}\quad l_{xy} & : & \text{長さ}\sqrt{a^2+b^2}, & \{\ (a-at,\ bt)\ \mid\ 0\leq t\leq 1\ \}, & \vec{n}=\frac{(b,\ a)}{\sqrt{b^2+a^2}}\quad 。\end{array}\right.$$

*55　ここでポイントとなるのは、$2m$ 階偏微分の後で $\vec{f}=\vec{0}$ と置いていることである。これにより、ノンゼロの寄与を与えるのは、$\exp\left(\frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right)$ のテイラー展開での m 次の項、即ち、

$$\frac{1}{m!}\ \left(\frac{1}{4}\vec{f}\boldsymbol{A}^{-1}(\vec{f})^t\right)^m$$

のみであることが分かると、計算（あるいは証明）がかなり簡単になる。

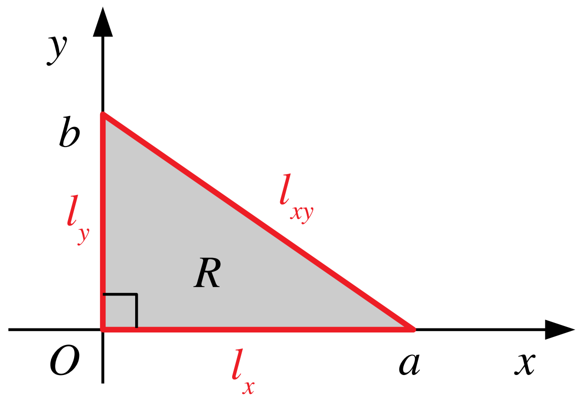


図 41　二次元領域 R（灰色）が（$z=$ (一定) 平面上の）直角三角形の場合。境界 ∂R は赤い太線で示し、その線分成分を l_x、l_y そして l_{xy} と名付けた。

なお、直線 l_{xy} の領域は、以下の様にも書き換えられることを注意しておく[*56]：

$$\{\ (a-at,\ bt)\ \mid\ 0\le t\le 1\ \}=\left\{\ \left(x,\ b-\frac{b}{a}x\right)\ \mid\ 0\le x\le a\ \right\}=\left\{\ \left(a-\frac{a}{b}y,\ y\right)\ \mid\ 0\le y\le b\ \right\}$$

この領域において、狭義のストークスの定理（定理 7.4）の z 成分を考えると、

$$\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A}=\int_{l_x} d\vec{s}\cdot\vec{A}+\int_{l_y} d\vec{s}\cdot\vec{A}+\int_{l_{xy}} d\vec{s}\cdot\vec{A}$$

$$=\int_0^a dx\ A_x(x,\ 0)+\int_0^b dy\ (-A_y(0,\ y))+\int_0^1 dt\,\{-aA_x(a-at,\ bt)+bA_y(a-at,\ bt)\}$$

右辺第 3 項において、x 成分に関して $x=a-at$ 、y 成分に関して $y=bt$ と置くと、

$$(\text{右辺第 3 項})=\int_a^0 dx\ A_x\left(x,\ b-\frac{b}{a}x\right)+\int_0^b dy\ A_y\left(a-\frac{a}{b}y,\ y\right)$$

また、$\int_a^0 dx=-\int_0^a dx$ にも注意すると、

$$\oint_{\partial R} d\vec{s}\cdot\vec{A}=-\int_0^a dx\left\{A_x\left(x,\ b-\frac{b}{a}x\right)-A_x(x,\ 0)\right\}+\int_0^b dy\left\{A_y\left(a-\frac{a}{b}y,\ y\right)-A_y(0,\ y)\right\}$$

[*56] ただし、x による表示では、$x=a$ から $x=0$ へと動くとする。ちなみに、直線 l_{xy} の法線は、以下の様に導出した。まず、直線の式、$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$、より、法線は $(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b})$ の方向であることがわかる。よって、規格化すると、

$$\vec{n}=\frac{(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b})}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=\frac{(b,\ a)}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^a dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy\ \frac{\partial}{\partial y} A_x(x,\ y) + \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a}{b}y} dx\ \frac{\partial}{\partial x} A_y(x,\ y) \\
&= \int\int_R dxdy \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right)(x,y) \qquad (74)
\end{aligned}
$$

よって、狭義のストークスの定理（定理 7.4）は、$z=0$ 平面上の直角三角形に関して厳密に成立する！！

次に、（とりあえず z 軸方向を忘れて）３次元ガウスの定理（定理 7.3）の二次元版を考える。先ず、上記の法線を用いると、

$$
\oint_{\partial R} |d\vec{s}|\ \vec{n}\cdot\vec{A} = \int_{l_x} |d\vec{s}|(-A_y) + \int_{l_y} |d\vec{s}|(-A_x) + \int_{l_{xy}} |d\vec{s}| \left(\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}} A_x + \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}} A_y \right)
$$

ここで、

$$
\int l_{xy} |d\vec{s}|(\cdots) = \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ dx\ (\cdots) = \int_0^b \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}\ dy\ (\cdots)
$$

であることを利用すると、

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial R} |d\vec{s}|\ \vec{n}\cdot\vec{A} &= \int_0^a dx(-A_y(x,\ 0)) + \int_0^b dy(-A_x(0,\ y)) \\
&\quad + \int_0^b dy \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1} \right) \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\ A_x\left(a-\frac{a}{b}y,\ y\right) \\
&\quad + \int_0^a dx \left(\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \right) \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}\ A_y\left(x,\ b-\frac{b}{a}x\right) \\
&= \int_0^a dx \left[A_y\left(x,\ b-\frac{b}{a}x\right) - A_y(x,\ 0) \right] + \int_0^b dy \left[A_x\left(a-\frac{a}{b}y,\ y\right) - A_x(0,\ y) \right] \\
&= \int_0^a dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy\ \frac{\partial}{\partial y} A_y(x,y) + \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a}{b}y} dx\ \frac{\partial}{\partial x} A_x(x,y) \\
&= \int\int_R dxdy \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y \right)(x,y) \qquad (75)
\end{aligned}
$$

従って、二次元版ガウスの定理も、$z=0$ 平面上の直角三角形に関して厳密に成立する！！

ちなみに、高さ h の直角三角柱（例えば、上記直角三角形に $0 \le z \le h$ の「厚み」を持たせたもの）に関し、３次元版ガウスの定理（定理 7.3）を示すには、式（75）の両辺

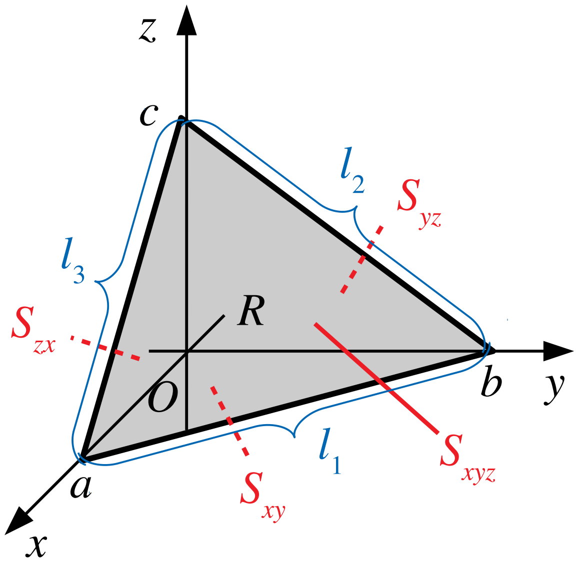


図 42　**三次元領域** R **（灰色）が直角三角錐の場合。**境界 ∂R は三つの直角三角形、S_{xy}、S_{yz} および S_{zx} 、と一つの鋭角三角形、S_{xyz}、から成る。S_{xyz} の三辺の長さは l_1、l_2、l_3 と表した。

を $\int_0^h dz(\cdots)$ して、$z = h$ と $z = 0$ にある底面の寄与を右辺に加えれば、比較的容易に示せる。

なお、x, y, z の役割を変えても、また、 a と b のどちらか（あるいは両方）が負の場合でも、これらの定理が厳密に成立することは、（上記のやり方にわずかの変更を加えれば）同様にして示せるハズである。

F.2　直角三角錐

図 42 の様な直角三角錐 R ：

$$\left\{ (x, y, z) \quad \middle| \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}$$

の境界は、次の四つの三角形からなる：

$$\left[\begin{array}{lcl} S_{xy} & : & \left\{ (x, y, 0) \mid 0 \leq x \leq a - \frac{a}{b}y,\ 0 \leq y \leq b \right\} = \left\{ (x, y, 0) \mid 0 \leq y \leq b - \frac{b}{a}x,\ 0 \leq x \leq a \right\} \quad ; \\ S_{yz} & : & \left\{ (0, y, z) \mid 0 \leq y \leq b - \frac{b}{c}z,\ 0 \leq z \leq c \right\} = \left\{ (0, y, z) \mid 0 \leq z \leq c - \frac{c}{b}y,\ 0 \leq y \leq b \right\} \quad ; \\ S_{zx} & : & \left\{ (x, 0, z) \mid 0 \leq z \leq c - \frac{c}{a}x,\ 0 \leq x \leq a \right\} = \left\{ (x, 0, z) \mid 0 \leq x \leq a - \frac{a}{c}z,\ 0 \leq z \leq c \right\} \quad ; \\ S_{xyz} & : & \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z,\ \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \right\} \end{array} \right.$$

三つの直角三角形の面積は、それぞれ、

$$A(S_{xy})=\frac{ab}{2},\quad A(S_{yz})=\frac{bc}{2},\quad A(S_{zx})=\frac{ca}{2}$$

S_{xyz} の面積、$A(S_{xyz})$、を求めるには、その三辺の長さ、$l_1=\sqrt{a^2+b^2}$、$l_2=\sqrt{b^2+c^2}$、$l_3=\sqrt{c^2+a^2}$ および余弦定理（定理 5.3）を用いて、次の様に、ヘロン（Heron）の公式を求めるのと同様にする：

$$\begin{aligned}\{4A(S_{xyz})\}^2 &= 4(l_1)^2(l_2)^2\sin^2\theta=(2l_1l_2)^2-(2l_1l_2\cos\theta)^2\\ &= 4(l_1)^2(l_2)^2-\left\{(l_1)^2+(l_2)^2-(l_3)^2\right\}^2\\ &= 4(a^2+b^2)(b^2+c^2)-\left\{a^2+b^2+b^2+c^2-c^2-a^2\right\}^2\\ &= 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

従って、

$$A(S_{xyz})=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2} \tag{76}$$

外向き法線 $\vec{n}$ は、

$$\vec{n}|_{S_{xy}}=(0,\ 0,\ -1),\quad \vec{n}|_{S_{yz}}=(-1,\ 0,\ 0),\quad \vec{n}|_{S_{zx}}=(0,\ -1,\ 0),$$

S_{xyz} の法線、 $\vec{n}|_{S_{xyz}}$ 、は、平面の式より、$(1/a,\ 1/b,\ 1/c)$ の方向であることはすぐにわかるので、規格化すると：

$$\vec{n}|_{S_{xyz}}=\frac{\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{(bc,\ ca,\ ab)}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}=\frac{(A(S_{yz}),\ A(S_{zx}),\ A(S_{xy}))}{A(S_{xyz})}$$

これより、次式が得られる：

$$A(S_{xy})\,\vec{n}|_{S_{xy}}\ +\ A(S_{yz})\,\vec{n}|_{S_{yz}}\ +\ A(S_{zx})\,\vec{n}|_{S_{zx}}\ +\ A(S_{xyz})\,\vec{n}|_{S_{xyz}}\ =\ 0 \tag{77}$$

これは、直角三角錐 R から出ていく法線の、面積による重みをつけた、釣り合いを表す。

次に、R に関する三次元版ガウスの定理（定理 7.3）を考える。先ず、上記の法線を用いると、境界上での面積分は、以下の様になる；

$$\begin{aligned}&\int\!\!\int_{\partial R}dS\ \vec{n}\cdot\vec{A}\\ &=\int\!\!\int_{S_{xy}}dxdy(-A_z)(x,y,0)+\int\!\!\int_{S_{yz}}dydz(-A_x)(0,y,z)+\int\!\!\int_{S_{zx}}dzdx(-A_y)(x,0,z)\\ &+\int\!\!\int_{S_{xyz}}dS\left[(\ n_x|_{S_{xyz}})\ A_x\ +\ (n_y|_{S_{xyz}})\ A_y\ +\ (n_z|_{S_{xyz}})\ A_z\ \right](x,\ y,\ z)\end{aligned} \tag{78}$$

ここで、右辺の S_{xyz} 上の面積を考える。例えば、A_z を含む項を考えるときは、x と y を動かし、

$$S_{xyz} = \left\{ \left(x, y, z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right) \quad | \quad 0 \le x \le a - \frac{a}{b}y,\ \ 0 \le y \le b \right\}$$

となる。そして、S_{xyz} 上で、x と y を微小量（dx と dy）動かした時の変位ベクトルの「増分」（$d\vec{r}$）は、

$$d\vec{r} = dx\left(1,\ 0,\ -\frac{c}{a}\right)\ +\ dy\left(0,\ 1,\ -\frac{c}{b}\right)$$

となるので、面積分を与えるベクトル面素[*57]はベクトル積：

$$d\vec{S} = dxdy\left\{\left(1,\ 0,\ -\frac{c}{a}\right) \times \left(0,\ 1,\ -\frac{c}{b}\right)\right\} = dxdy\left(\frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ 1\right)$$

で表せる。従って、

$$\left|d\vec{S}\right| = |dxdy|\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} = |dxdy|\frac{\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}}{ab} = |dxdy|\ \left.\frac{1}{n_z}\right|_{S_{xyz}}$$

これより、式（78）で A_z を含む項の和は：

$$\begin{aligned}
&\{A_z \text{ を含む項の和 }\} \\
&= \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a}{b}y} dx \left[-A_z(x,\ y,\ 0) \quad + \quad \left(\left.\frac{1}{n_z}\right|_{S_{xyz}}\right)\left(n_z|_{S_{xyz}}\right) A_z\left(x,\ y,\ c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right)\right] \\
&= \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a}{b}y} dx \left[-A_z(x,\ y,\ 0) \quad + \quad A_z\left(x,\ y,\ c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right)\right] \\
&= \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a}{b}y} dx \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz\ \frac{\partial}{\partial z}A_z(x,\ y,\ z) \\
&= \int\int\int_R dxdydz\ \frac{\partial}{\partial z}A_z(x,\ y,\ z)
\end{aligned}$$

同様にして、y と z を動かせば、

$$\{A_x \text{ を含む項の和 }\} = \int\int\int_R dxdydz\ \frac{\partial}{\partial x}A_x(x,\ y,\ z)$$

となり、z と x を動かせば、

$$\{A_y \text{ を含む項の和 }\} = \int\int\int_R dxdydz\ \frac{\partial}{\partial y}A_y(x,\ y,\ z)$$

[*57] 方向が法線（$\vec{n}$）方向で、大きさが面素の大きさで与えられるベクトル

となる。よって、全部を足し合わせれば、

$$\int\int_{\partial R} dS\ \vec{n}\cdot\vec{A} = \int\int\int_R dxdydz\ \left(\frac{\partial}{\partial x}A_x\ +\ \frac{\partial}{\partial y}A_y\ +\ \frac{\partial}{\partial z}A_z\right)(x,y,z)$$
$$= \int\int\int_R dxdydz\ \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}(x,y,z) \tag{79}$$

即ち、**定理 7.3 が直角三角錐** R **に関し、厳密に成立する**ことが示せた。

同様にして、a、b、c のいずれか、あるいはすべて、が負の場合でも、三次元版ガウスの定理（定理 7.3）が厳密に成立することが示せるハズである。

ちなみに、狭義のストークスの定理（定理 7.4）が厳密に成立することは、S_{xy}、S_{yz}、S_{zx} に関しては、既に小節 F.1（およびその拡張）で証明済みである。

S_{xyz} に関して証明することも、狭義のストークスの定理（定理 7.4）の直観的証明で示した様に、

(i) 境界の一部を共有する二つの領域 R_1、R_2 それぞれで定理が厳密に成り立つ時、複合領域 $(R_1 \cup R_2)$ でも厳密に成り立つ事；

(ii) 領域 R で定理が厳密に成り立つとき、R と境界（∂R）を完全に共有する領域 R' でも、（R と R' の間を特異点が阻まない限り）定理が厳密に成立する事

の二つより厳密に証明できる。[*58]

補遺 G　[付録 1] 数列、級数、確率分布

江澤　潔　[手書き：2021/02/07-08; 電子文書化：2021/03/09-13]

本文中ではほとんど登場しなかったが、数列や級数に関する公式やその確率分布への応用も、数理科学で頻繁に用いられるものである。ここに幾つか基本的な公式をおさらいしておく。

[*58] S_{xy}、S_{yz}、S_{zx} で成立 $\xrightarrow{\text{(i)}}$ $S_{xy}\cup S_{yz}\cup S_{zx}$ でも成立 $\xrightarrow{\text{(ii)}}$ S_{xyz} でも成立（$\because$ $S_{xy}\cup S_{yz}\cup S_{zx}$ と S_{xyz} は境界を完全に共有）。

G.1　等差数列・級数とその多次式および分数式への拡張

G.1.1　定数数列・級数

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

［ 証明 ］

　1 を n 回足せば n になる。（ほとんど自明。）

［ 証明終わり ］

G.1.2　等差数列・級数

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

［ 証明１ ］（中学校などでよく習うガウスのやり方）

　$S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} k$ と置くと、

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\
+ & S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\
-- & -- & - & --- & - & --- & - & \cdots & - & --- & ----- \\
= & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & = n \times (n+1)
\end{array}$$

従って、$S_n = n(n+1)/2$

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］

　ここで敢えて、$k = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}$ と書く。すると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)k}{2}$$

最右辺の２番目の総和の中で、$k = k' + 1$ と置き、k' についての和に置き換えてから、再びダミー添字 k' を k と呼び直すと、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} - \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{k'(k'+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}$$

この最右辺の二つの総和は、足し合わせる項は $\frac{k(k+1)}{2}$ で共通で、$k = 1$ から $k = (n-1)$ までの項は相殺しあうので、結局、１番目の総和のの $k = n$ の項と２番目の総和の $k = 0$ の項のみが残る。従って、次式を得る：

$$S_n = \left.\frac{k(k+1)}{2}\right|_{k=0}^{k=n} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{0(0+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

［ 証明２終わり ］

［ 補足 ］証明２のやり方は証明１のやり方（ガウスの手法）に較べてまどろっこしく思われるかも知れない。しかし実はこのやり方は（下記で幾度も登場するように）恐らくガウスの手法よりも応用範囲が広い方法である。一般に、級数 $S_{1:n}[f] = \sum_{k=1}^{n} f_k$ において、$f_k = F_k - F_{k-1}$ と書ける様な数列 $\{\ F_k\ \}$ が存在する場合、この級数は以下のように簡単に計算できる：

$$S_{1:n}[f] = \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} F_k - \sum_{k=1}^{n} F_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} F_k - \sum_{k'=0}^{n-1} F_{k'} = [F_k]|_{k=0}^{k=n} = F_n - F_0 \quad (80)$$

これは、微積分の基本定理：

$$\int_{x=a}^{x=b} dx\ \frac{d}{dx} F(x) = F(b) - F(a)$$

の離散的数列版と言っても良いのかもしれない。

G.1.3　二次式数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

［ 証明 ］

$$k(k-1) = \frac{1}{3}\left\{(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)\right\}$$

と書け、これは上記の一般形、式（80)、で $F_k=\frac{1}{3}(k+1)k(k-1)$ の場合にあたるので、

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\left[\frac{1}{3}(k+1)k(k-1)\right]\Bigg|_{k=0}^{k=n}=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)-\frac{1}{3}(0+1)0(0-1)=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$$

[証明終わり]

G.1.4 多次式数列への拡張

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\cdots(k-r)=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r)}{r+2}$$

[証明]

$$k(k-1)\cdots(k-r)=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r)\quad-\quad k(k-1)\cdots(k-r-1)}{r+2}$$

と書け、これは上記の一般形、式（80)、で $F_k=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r)}{r+2}$ の場合に当たるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\cdots(k-r)&=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r)\quad-\quad(0+1)0(0-1)\cdots(0-r)}{r+2}\\&=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r)}{r+2}\end{aligned}$$

[証明終わり]

[補足] 上記で求めた公式より、任意の $(r+1)$ 次式：

$$a_{r+1}x^{r+1}+a_rx^r+\cdots+a_1x+a_0$$

を

$$a_{r+1}x(x-1)\cdots(x-r)+b_rx(x-1)\cdots(x-r+1)+\cdots+b_1x+b_0$$

と書き直せば[*59]、この $(r+1)$ 次式に基づいた級数は、次の様に容易に計算できる：

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{a_{r+1}k^{r+1}+a_rk^r+\cdots+a_1k+a_0\right\}$$

[*59] この変形は、新たな係数、b_r, ..., b_1, b_0、に関する連立一次方程式に帰着するので、必ずできる。

$$= \sum_{k=1}^{n} \{a_{r+1}k(k-1)\cdots(k-r) + b_r k(k-1)\cdots(k-r+1) + \cdots + b_1 k + b_0\}$$

$$= a_{r+1}\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r)}{r+2} + b_r\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r+1} + \cdots + b_1\frac{(n+1)n}{2} + b_0 n$$

これは、$(r+1)$ 次式の書き直しが容易に思いつく時には実に強力な級数の計算法となる。例えば、

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \{k(k-1)+k\} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2}$$

また、ちょっと変形したバージョンとして、

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \{(k+1)k(k-1)+k\} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4} + \frac{(n+1)n}{2}$$

これにより、$\sum_{k=1}^{n} k^2$ や $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式、あるいは（学校や塾等で習う）そのいささかテクニカルな導出法、を暗記しなくても、上記の「一般的な手法」をそのまま適用すればすぐに導出できるので、脳の記憶容量を節約できる！！*60

G.1.5　分数式への拡張（１）

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$$

[証明]

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k+1} - \left(-\frac{1}{k}\right)$$

---

*60　しかしながら、もっと一般的な場合には、$(r+1)$ 次式（$f(x)$ としておく）の級数は $(r+2)$ 次式になることを利用して、

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = c_{r+2}n^{n+2} + c_{r+1}n^{n+1} + \cdots c_1 n + c_0$$

と置いておき、その $n = 1, 2, ..., r+3$ の場合の両辺を具体的に計算して、c_{r+2}，c_{r+1}，...，c_1，c_0 に関する連立一次方程式として解いた方が、速くて簡単かも知れない。

より、これは上記の一般形、式 (80)、で $F_k=-\frac{1}{k+1}$ の場合にあたるので、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left[-\frac{1}{k+1}\right]\Bigg|_{k=0}^{k=n}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{0+1}=-\frac{1}{n+1}+1$$

[証明終わり]

G.1.6　分数式への拡張（２）

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}=\frac{1}{r}\left\{-\frac{1}{(n+\alpha+1)\cdots(n+\alpha+r)}+\frac{1}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+r)}\right\}$$

[証明]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}\\&=\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{(k+\alpha)\cdots(k+\alpha+r-1)}-\frac{1}{(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}\right\}\\&=\frac{1}{r}\left\{-\frac{1}{(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}+\frac{1}{(k+\alpha)\cdots(k+\alpha+r-1)}\right\}\end{aligned}$$

より、これは上記の一般形、式 (80)、で $F_k=-\frac{1}{r}\frac{1}{(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}$ の場合にあたるので、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}=\left[-\frac{1}{r}\frac{1}{(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+r)}\right]\Bigg|_{k=0}^{k=n}$$
$$=\frac{1}{r}\left\{-\frac{1}{(n+\alpha+1)\cdots(n+\alpha+r)}+\frac{1}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+r)}\right\}$$

[証明終わり]

G.2　等比数列・級数とその拡張

G.2.1　等比数列・級数

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

［ 証明１ ］$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$ とすると、

$$xS_n(x)=x\sum_{k=0}^{n}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^{k+1}=\sum_{k'=1}^{n+1}x^{k'}$$

従って、

$$(1-x)S_n=\sum_{k=0}^{n}x^k-\sum_{k'=1}^{n+1}x^{k'}=[x^k]|_{k=0}-[x^k]|_{k=n+1}=1-x^{n+1} \tag{81}$$

この等式の最左辺と最右辺を $1-x$ で割れば、公式が求められる。

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］$x^k=\frac{x^k-x^{k+1}}{1-x}$ であることに気づくと、これは上記の一般形、式（80)、で $F_k=-\frac{x^{k+1}}{1-x}$ の場合であることがわかる。更に、この右辺の総和の下限が $k=1$ ではなく $k=0$ であることに注意すると、

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\left[-\frac{x^{k+1}}{1-x}\right]\Bigg|_{k=-1}^{k=n}=\frac{-x^{n+1}+x^{-1+1}}{1-x}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

［ 証明２終わり ］

G.2.2　等比級数の拡張（１）

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

［ 証明１ ］$S_n'(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ と置くと、

$$(1-x)S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}kx^{k+1-1}$$

右辺２番目の総和で、ダミー添字 k を $k'=k+1$ に置き換えると、

$$(1-x)S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}-\sum_{k'=1}^{n+1}(k'-1)x^{k'-1}$$

（右辺２番目の総和の下限は元々 $k' = 2$ であるが、$k' = 1$ の項はゼロなので、下限を $k' = 1$ に拡張しても結果は変わらない。）この右辺を更に計算すると、

$$(1-x)S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - nx^n = \sum_{k''=0}^{n-1} x^{k''} - nx^n$$

ここで、最右辺の総和の計算に小小節 G.2.1 の結果を用いて、

$$(1-x)S_n'(x) = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}$$

この最左辺と最右辺を $1-x$ で割れば求めるべき公式となる。

［ 証明１終わり ］

［ 証明２ ］まず、公式左辺の総和の下限は $k = 1$ であるが、$k = 0$ の時の項はゼロなので、下限を $k = 0$ に拡張しても結果は変わらない。よって、

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{d}{dx}(x^k)\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right]$$

最右辺の [...] の中身に小小節 G.2.1 の結果を用いると、

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right] = \frac{-(n+1)x^n}{1-x} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

［ 証明２終わり ］

G.2.3　等比級数の拡張（２）

$$\sum_{k=r}^{n} k(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r \left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right]$$

［ 証明 ］

小小節 G.2.1 の両辺を x に関して r 階微分すると、右辺は自明。左辺は、

$$（左辺）= \left(\frac{d}{dx}\right)^r \left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^r (x^k)$$

総和中の $k=0$ から $k=r-1$ までの項は、微分するうちに消えていくので、総和の下限は $k=r$ としてもよい。従って、

$$（左辺）= \quad \sum_{k=r}^{n}\left(\frac{d}{dx}\right)^{r}(x^k)=\sum_{k=r}^{n}k(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r}$$

よって、欲しい等式が証明された。

［ 証明終わり ］

［ 補足 ］$|x|<1$ でかつ $n\to\infty$ とすると、小小節 G.2.1 の等式は

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x} \quad 、$$

小小節 G.2.3 の等式は

$$\sum_{k=r}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{r}\left[\frac{1}{1-x}\right]=1\cdot 2\cdots r\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

となり、分数式のテイラー級数となる。

G.2.4 [応用] 幾何分布

「当たり」の確率が p のクジがあり、「はずれ」が出るまでクジを引き続けるとする。「はずれ」が出るまで引いた「当たり」の数 n（$=0,\ 1,\ 2,\ ...$）の確率は：

$$P_{幾何}[n;\ p]=(1-p)p^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ ...)$$

［ 導出法 ］

クジ各々一回ごとに「当たり」の確率は p で、n 回それを続けるので、

$$\underbrace{p\times p\times\cdots\times p}_{n\,個}=p^n$$

そして、その直後に「はずれ」の出る確率は $(1-p)$ なので、

$$P_{幾何}[n;\ p]=(1-p)p^n$$

［ 導出法終わり ］

(性質)

$E[f(n)] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \{f(n)P_{\text{幾何}}[n;\ p]\}$ を（幾何分布の下での）$f(n)$ の期待値、$\mathrm{Var}[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} E[\{n-E[n]\}^2]$（$= E[n^2]-(E[n])^2$）を（幾何分布の下での）$n$ の分散とすると、

$$E[n] = \frac{p}{1-p} \quad , \quad E[n^2] = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \quad , \quad \mathrm{Var}[n] = \frac{p}{(1-p)^2}$$

[導出法]

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)p^n = (1-p)p\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}$$

ここで、最右辺の総和で下限が $n=1$ に変化したのは、$n=0$ の項がゼロになるためである。この最右辺に小小節 G.2.2 の公式の $n \to \infty$ の極限を適用すると、

$$E[n] = (1-p)p \times \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$$

よって、一つ目の等式が求まった。次に、

$$E[n^2] = E[n(n-1)] + E[n] = (1-p)p^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^{n-2} + E[n]$$

最右辺の総和で下限が $n=2$ になったのは、$n=0$ と $n=1$ の項がゼロになるからである。この最右辺の総和に小小節 G.2.3 の公式の $n \to \infty$ 極限を適用すると、

$$E[n^2] = (1-p)p^2 \times 2\frac{1}{(1-p)^3} + E[n] = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

最後に、

$$\mathrm{Var}[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$$

[導出法終わり]

[補足] 母関数：

$$\Phi_{\text{幾何}}[t;\ p] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n\ P_{\text{幾何}}[n;\ p] = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)(tp)^n = \frac{1-p}{1-tp}$$

を用いて色々出すやり方もある。

G.3　二項定理

定理 補遺 G .1（二項定理）　二つの実数（あるいは複素数）を a と b、そして正の整数を n とすると、

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\ a^r\ b^{n-r}$$

ここで、

$${}_nC_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdots 1}$$

は、n ケの物から r ケを一度に選び出す組み合わせの総数。

[証明]

掛け合わされた n ケの $(a+b)$ を、便宜上、(1), (2), ..., (n) とラベルをつけて示すと：

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & & (2) & & \cdots & & (n) \\ (a+b) & \times & (a+b) & \times & \cdots & \times & (a+b) \end{array}$$

$(a+b)^n$ の展開式に現れる各項は、上記 (1), (2), ..., (n) とラベルされた $(a+b)$ の各々の中から a もしくは b を選んで掛け合わせたものである。例えば、$a^r\ b^{n-r}$ という項は、(1), (2), ..., (n) から r 個 a を選び、残りの $(n-r)$ 個は b を選ぶようなやり方で作られるが、(1), (2), ..., (n) から r 個 a を選ぶようなやり方は、ラベル、(1), (2), ..., (n)、の取られる順番の違いも考慮に入れると、$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ 通りある。しかしながら、ここでは一度に r ケ取ってくるので、実質上、（例えば）最初から小さい順に並んだラベルを取ってくる様なもんである。この為、r ケの a 同士での順番の違いによって生じる $r!$ 通りの冗長性を除いた $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ （$= {}_nC_r$）ケが、実際に $a^r\ b^{n-r}$ という項が生じる回数となる。これを、r についての可能な値、$r = 0,\ 1 ...,\ n$、での総和をとると、定理 (補遺 G .1) が成立する。

[証明終わり]

[二項係数、${}_nC_r$ の性質]

G.3.1

$$r\ {}_nC_r = n\ {}_{n-1}C_{r-1}$$

[導出法]

$$(\text{左辺}) = r\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = n\frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = (\text{右辺})$$

[導出法終わり]

G.3.2

$$r(r-1)\cdots(r-k+1)\ {}_nC_r = n(n-1)\cdots(n-k+1)\ {}_{n-k}C_{r-k}$$

[導出法] 性質 G.3.1 の導出を k 回続けて繰り返す。 [導出法終わり]

G.3.3

$${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

[導出法]

$$(\text{左辺}) = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n![(n-r+1)+r]}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = (\text{右辺})$$

[導出法終わり]

G.3.4

$${}_{n+m}C_t = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\delta(t,\ r{+}s)\ {}_nC_r\ {}_mC_s \left(= \sum_{r=\max\{0,\ t-m\}}^{\min\{n,\ t\}} {}_nC_r\ {}_mC_{t-r} = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_mC_s \right)$$

ただし、$\delta(i,j)$ はクロネッカーのデルタ：

$$\delta(i,j)=\begin{cases} 1 & if \quad i=j\ , \\ 0 & if \quad i\neq j\ . \end{cases}$$

［ 導出法１ ］

$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n \times (1+x)^m$ をふた通りのやり方で二項展開する。まず、$(1+x)^{n+m}$ をそのまま二項展開すると、

$$(1+x)^{n+m}=\sum_{t=0}^{n+m} {}_{n+m}C_t\ x^t$$

次に、$(1+x)^n$ と $(1+x)^m$ をそれぞれ二項展開すると、

$$(1{+}x)^{n+m}=(1{+}x)^n{\times}(1{+}x)^m=\left\{\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\ x^r\right\}\times\left\{\sum_{s=0}^{m} {}_mC_s\ x^s\right\}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left[{}_nC_r\ {}_mC_s\ x^{r+s}\right]$$

この最右辺で、敢えて、$x^{r+s}=\sum_{t=0}^{n+m}\left\{\delta(t,\ r+s)\ x^t\right\}$ と置いて、更に総和の順序を入れ替えて書き直すと、

$$(1{+}x)^{n+m}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left[{}_nC_r\ {}_mC_s\ \sum_{t=0}^{n+m}\left\{\delta(t,\ r+s)\ x^t\right\}\right]=\sum_{t=0}^{n+m}\left[\left\{\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\delta(t,\ r+s)\ {}_nC_r\ {}_mC_s\right\}\ x^t\right]$$

この二つの展開式は、x の関数として等しくなければならないので、各々の x^t（$t=0,\ 1,\ ...,\ n+m$）の係数が等しくならねばならない。従って

$${}_{n+m}C_t=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\delta(t,\ r+s)\ {}_nC_r\ {}_mC_s$$

［ 導出法１終わり ］

［ 導出法２ ］

先ず、$t=0$ の時、公式は、

$${}_{n+m}C_0=\sum_{s=0}^{0} {}_nC_{0-s}\ {}_mC_s={}_nC_0\ {}_mC_0$$

と簡略化されるが、${}_{n+m}C_0 = {}_nC_0 = {}_mC_0 = 1$ なので、この等式が成立するのは自明。また、$t = n + m$ の時、公式は、

$$ {}_{n+m}C_{n+m} = \sum_{s=\max\{0,\ n+m-n\}}^{\min\{n+m,\ m\}} {}_nC_{n+m-s}\ {}_mC_s = {}_nC_n\ {}_mC_m $$

と簡略化されるが、${}_{n+m}C_{n+m} = {}_nC_n = {}_mC_n = 1$ なので、はやり、この等式が成立するのも自明。これを念頭に置いた上で、公式を（n を固定して $t = 1,\ 2,\ ...,\ n + m - 1$ 全てを対象としながら）m に関する数学的帰納法を用いて証明する。

まず、$m = 1$（かつ $1 \leq t \leq n$）の時、公式は、

$$ {}_{n+1}C_t = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{t,\ 1\}} {}_nC_{t-s}\ {}_1C_s = \sum_{s=0}^{1} {}_nC_{t-s}\ {}_1C_s = {}_nC_t\ {}_1C_0 + {}_nC_{t-1}\ {}_1C_1 $$

この最右辺に、${}_1C_0 = {}_1C_1 = 1$ を代入すると、

$$ {}_{n+1}C_t = {}_nC_t + {}_nC_{t-1} $$

これは、小小節 G.3.3 の等式に他ならない！従って、$m = 1$ の時は問題の等式が成立する。

次に、ある m（≥ 1）の時に等式が（可能な全ての t に対し）成立したと仮定する。その時、m を $m+1$ にした時の右辺を次のように計算する。まず、小小節 G.3.3 の等式を用いて、

$$ {}_{n+m+1}C_t = {}_{n+m}C_t + {}_{n+m}C_{t-1} $$

ここで右辺の各々の項に上記の仮定を適用すると、

$$ {}_{n+m+1}C_t = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_mC_s + \sum_{s=\max\{0,\ t-1-n\}}^{\min\{m,\ t-1\}} {}_nC_{t-1-s}\ {}_mC_s $$

右辺の 2 番目の総和で、ダミー変数 s を $s' = s + 1$ に置き換えると、

$$ {}_{n+m+1}C_t = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_mC_s + \sum_{s'=\max\{1,\ t-n\}}^{\min\{m+1,\ t\}} {}_nC_{t-s'}\ {}_mC_{s'-1} $$

ここで改めて、s' を s と書き直すと、

$$ {}_{n+m+1}C_t = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_mC_s + \sum_{s=\max\{1,\ t-n\}}^{\min\{m+1,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_mC_{s-1} $$

この右辺の 2 つの総和の範囲は、次の三つの領域に別けられる：

(i)　$s=0$（ただし、$t-n\leq 0$ の時のみ有効）;

(ii)　$s=\max\{1,\ t-n\},\ ...,\ \min\{m,\ t\}$;

(iii)　$s=m+1$（ただし、$t\geq m+1$ の時のみ有効）。

まず、領域 (ii) の寄与は、以下を与える：

$$
\begin{aligned}
\text{領域 (ii) の寄与} &= \sum_{s=\max\{1,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} \left[{}_nC_{t-s}\ {}_mC_s + {}_nC_{t-s}\ {}_mC_{s-1}\right] \\
&= \sum_{s=\max\{1,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} \left[{}_nC_{t-s}\left\{{}_mC_s + {}_mC_{s-1}\right\}\right] \\
&= \sum_{s=\max\{1,\ t-n\}}^{\min\{m,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_{m+1}C_s
\end{aligned}
$$

ここで最後の等式を得るのに、再び小小節 G.3.3 の等式を用いた。

次に、領域 (i) の寄与は、

$$\text{領域 (i) の寄与} = {}_nC_{t-0}\ {}_mC_0 = {}_nC_{t-0}\ {}_{m+1}C_0$$

ここで、二つ目の等式は、${}_mC_0 = {}_{m+1}C_0 = 1$ より従う。

最後に、領域 (iii) の寄与は、

$$\text{領域 (iii) の寄与} = \left[{}_nC_{t-s}\ {}_mC_{s-1}\right]\Big|_{s=m+1} = \left[{}_nC_{t-s}\ {}_{m+1}C_s\right]\Big|_{s=m+1}$$

ここで、二つ目の等式は、${}_mC_m = {}_{m+1}C_{m+1} = 1$ より従う。

これら三つの寄与をすべてかき集めて整理すると：

$${}_{n+m+1}C_t = \sum_{s=\max\{0,\ t-n\}}^{\min\{m+1,\ t\}} {}_nC_{t-s}\ {}_{m+1}C_s$$

従って、m の時に問題の等式が成立すれば、$m+1$ の時にもそれが成立する。よって、数学的帰納法により、すべての正の整数 m に対して問題の等式は成立する。

[導出法２終わり]

G.3.5　[応用] 二項分布

「成功」確率 p のベルヌーイ（Bernoulli）試行を N 回行って、n 回「成功」する確率は：

$$P_{\text{二項}}[n\ ;\ p,\ N] = {}_NC_n\ p^n(1-p)^{N-n} \quad (n=0,\ 1,\ ...,\ N)$$

この時、

$$E[n] = Np \quad , \quad E[n^2] = N(N-1)p^2 + Np \quad , \quad \mathrm{Var}[n] = N(1-p)p$$

[導出法]

「成功」確率を $a = p$、「失敗」確率を $b = (1-p)$ とすれば、二項定理（定理：補遺 G .1）の考えがそのまま適用できるので、確率 $P_{二項}[n\,;\,p,\,N]$ は OK。

次に、

$$E[n] = \sum_{n=0}^{N} n\ P_{二項}[n\,;\,p,\,N] = \sum_{n=0}^{N} n\ {}_NC_n p^n (1-p)^{N-n}$$

ここで、最右辺に小小節 G.3.1 の等式を適用すると、（$n=0$ で項がゼロになることも用いて）

$$E[n] = \sum_{n=1}^{N} N\ {}_{N-1}C_{n-1}\ p^n (1-p)^{N-n} = Np \sum_{n=1}^{N} {}_{N-1}C_{n-1}\ p^{n-1}(1-p)^{(N-1)-(n-1)}$$

この最右辺の総和が $(p+(1-p))^{N-1} = 1$ になることに気づくと、結局、

$$E[n] = Np$$

同様にして、今度は小小節 G.3.2 の等式を利用すると、

$$\begin{aligned}
E[n(n-1)] &= \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\ P_{二項}[n\,;\,p,\,N] = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\ {}_NC_n\ p^n(1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=2}^{N} N(N-1)\ {}_{N-2}C_{n-2}\ p^n(1-p)^{N-n} \\
&= N(N-1)p^2 \sum_{n=2}^{N} {}_{N-2}C_{n-2}\ p^{n-2}(1-p)^{(N-2)-(n-2)} \\
&= N(N-1)p^2\ (p+(1-p))^{N-2} = N(N-1)p^2
\end{aligned}$$

これより、

$$E[n^2] = E[n(n-1)] + E[n] = N(N-1)p^2 + Np$$

最後に、

$$\mathrm{Var}[n] = E[n^2] - \{E[n]\}^2 = N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = -Np^2 + Np = Np(1-p)$$

[導出法終わり]

[補足]

母関数、

$$\Phi_{二項}[t\ ;\ p,\ N] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} t^n\ P_{二項}[n\ ;\ p,\ N] = (1-p+pt)^N$$

を利用して色々出すやり方もある。

G.4　超幾何分布

ツボの中に N ケの球があり、そのうち M ケは「赤」、残りの $(N-M)$ ケは「白」とする。このツボから n（$\leq N$）ケの球を戻さずに取り出すと、その中の m ケ（$\max\{0,\ n-(N-M)\} \leq m \leq \min\{n,\ M\}$）が「赤」である確率は、

$$\begin{aligned} &P_{超幾何}[m\ ;\ N,\ M,\ n] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\ \frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)\ (N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+m+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\ &= \frac{{}_MC_m\ {}_{N-M}C_{n-m}}{{}_NC_n} \end{aligned}$$

[注：] $N \to \infty$、$M \to \infty$ および $\frac{M}{N} \to p$ の極限で、この確率分布は二項分布、$P_{二項}[m\ ;\ p,\ n]$、に帰着する。

[導出法 1]

既に赤玉を j ケ、白玉を k ケ取り出した直後のツボの中には、赤玉が $(M-j)$ ケ、白玉が $(N-M-k)$ ケ残っている。この次に $(j+1)$ 番目の赤玉を取り出す確率は、

$$\frac{M-j}{N-j-k}、$$

$(k+1)$ 番目の白玉を取り出す確率は、

$$\frac{N-M-k}{N-j-k}$$

このようにして、一つずつ玉を取り出していくと、m ケの赤玉と $(n-m)$ ケの白玉を取り出す1パターンの n 回の連続試行の確率は、

$$\frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)\ (N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+m+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

赤と白の取り出す順序で区別されるこういったパターンは、$_nC_m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ 通り存在するので、全体の確率は、$P_{超幾何}[m\ ;\ N,\ M,\ n]$ の公式の右辺となる。

［導出法１終わり］

［導出法２］

（全ての玉を区別可能とすると）、N ケの玉から n ケ取り出す場合の数は、

$$_NC_n = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}$$

M ケの「赤」玉から m ケ取り出す場合の数は、

$$_MC_m = \frac{M!}{(M-m)!m!} = \frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)}{m!}$$

$(N-M)$ ケの「白」玉から $(n-m)$ ケ取り出す場合の数は、

$$_{N-M}C_{n-m} = \frac{(N-M)!}{(N-M-n+m)!(n-m)!} = \frac{(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+m+1)}{(n-m)!}$$

これらより、ツボから「赤」を m ケと「白」を $(n-m)$ ケ取り出す確率は、

$$\frac{_MC_m \times {}_{N-M}C_{n-m}}{_NC_n} = \text{（公式の右辺）}$$

［導出法２終わり］

［補足］［導出法２］および小小節 G.3.4 の二項係数の性質を用いれば、

$$\sum_{m=\max\{0,\ n-(N-M)\}}^{\min\{n,\ M\}} P_{超幾何}[m\ ;\ N,\ M,\ n] = 1$$

はすぐに証明できる。

G.4.1 ［性質］

$$E[m] = \frac{M}{N}n \quad , \quad E[m^2] = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}n(n-1) + \frac{M}{N}n \quad , \quad \mathrm{Var}[m] = \frac{Mn}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

［導出法］

先ず、$E[m]$ は、

$$E[m] = \sum_m m\ P_{\text{超幾何}}[m\ ;\ N,\ M,\ n]$$

$$= \sum_m \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \frac{M\cdots(M-m+1)(N-M)\cdots(N-M-n+m+1)}{N(N-1)\cdots(N-M+1)}$$

$$= \frac{M}{N} n \sum_m \left[\frac{(n-1)!}{(m-1)!((n-1)-(m-1))!} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(M-1)\cdots((M-1)-(m-1)+1)(N-M)\cdots(N-M-n+m+1)}{(N-1)\cdots((N-1)-(n-1)+1)} \right]$$

$$= \frac{M}{N} n \left[\sum_m P_{\text{超幾何}}[m-1\ ;\ N-1,\ M-1,\ n-1] \quad = 1 \right] \quad = \frac{M}{N} n$$

次に、$E[m(m-1)]$ は、

$$E[m(m-1)] = \sum_m m(m-1)\ P_{\text{超幾何}}[m\ ;\ N,\ M,\ n]$$

$$= \sum_m \frac{n!}{(m-2)!(n-m)!} \frac{M\cdots(M-m+1)(N-M)\cdots(N-M-n+m+1)}{N(N-1)\cdots(N-M+1)}$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} n(n-1) \sum_m \left[\frac{(n-2)!}{(m-2)!((n-2)-(m-2))!} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(M-2)\cdots((M-2)-(m-2)+1)(N-M)\cdots(N-M-n+m+1)}{(N-2)\cdots((N-2)-(n-2)+1)} \right]$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} n(n-1) \left[\sum_m P_{\text{超幾何}}[m-2\ ;\ N-2,\ M-2,\ n-2] \quad = 1 \right]$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} n(n-1)$$

従って、

$$E[m^2] = E[m(m-1)] + E[m] = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} n(n-1) + \frac{M}{N} n$$

最後に、

$$\mathrm{Var}[m] = E[m^2] - \{E[m]\}^2 = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} n(n-1) + \frac{M}{N} n - \left(\frac{M}{N} n \right)^2$$

$$= \frac{n(n-1)M(M-1)N + N(N-1)Mn - (N-1)M^2 n^2}{N^2(N-1)}$$

$$= \frac{-n^2 M(N-M) + nNM(N-M)}{N^2(N-1)}$$

表 1　フィッシャーの厳密検定で使われる contingency table（遺伝学の case-control study の場合）

		形質（疾患）		（計）
		Case	Control	
遺伝子型	野生型	$n-m$	$N-M-(n-m)$	$N-M$
	変異型	m	$M-m$	M
（計）		n	$N-n$	N

$$= \frac{N-M}{N} \frac{Mn}{N-1} \frac{N-n}{N} \quad = \text{（公式右辺）}$$

[導出法終わり]

[注：] この分布関数に関しては、母関数がどれ程有用なのか、私は知らない。

G.4.2　[応用] フィッシャーの厳密検定（Fisher's Exact Test）

この検定は、遺伝学の case-control study 等、遺伝子座と特定の疾患（あるいは形質）との間の相関（association）を調べる解析でよく用いられる。この検定では、表 1 に示したような 2 × 2 contingency table を用いる。

これで、case と変異型との相関が偶然よりも優位に多いか見たい。「何の相関もない」という 帰無仮説（null hypothesis）の下では、m は**超幾何分布** 、$P_{超幾何}[m\,;\ N,\ M,\ n]$、に従うので、m の「観測値」（m_{obs}）に対する P-値：

$$\text{P-value}(m_{obs}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=m_{obs}}^{\min\{n,\ M\}} P_{超幾何}[m\,;\ N,\ M,\ n]$$

が、閾値（例えば 5% や 1%、あるいはその Bonferroni 補正値）よりも小さくなれば、相関（association）が有意にある、と結論される。

補遺 H　[付録 2] 私が英語学習&訓練に用いた方法および教材

江澤　潔　[執筆：2021/03/18-19]

私は英語に関するプロでもなければエキスパートでもない。だが、長年にわたる苦労の末、研究者／科学者としての日常業務（英語論文の読解&執筆、英語での議論、英語での研究発表の聴解& 実行等を含む）を進めるのにほぼ十分なだけの英語力は身に付けたという自負はある。既に述べたが、その為に私は長年にわたって苦労して来た。私は学習塾や英会話教室等に通ったことこそ一度もないが、実に様々な学習&訓練法や教材を活用して来た。（以前にも述べたが、私の家系は英語が苦手なので、我がゲノム中に「英語が得意な遺伝子」はないはずである。）別に見せびらかして自慢したいわけではないが、複数の 人々の リクエストに お応えして、以下、私が**英語を学習&訓練**するのに実行して来た**方法**および活用した**教材**等について、覚えている限り挙げて、少しだけ解説してみる。

[ただし、学校での英語の授業の復習をやっていたのは当たり前として、一々挙げるのは差し控える。]

H.1　中学時代（1981.4 ～ 1984.3）

私は学習塾や英会話教室等に通ったことはないので、初めて英語に触れたのは中学生になってからであった。中学時代にやった事は主に二種類ある。

NHK ラジオ講座の聴講　今とはラインナップが違うのかも知れないが、中一の時に**「基礎英語」**中二で**「続・基礎英語」**をそれぞれ一年間聴き通した。土曜（？）の特集で、ギリシャ神話の物語を簡単な英語で語ってくれるのが楽しみであった。しかし、中三で聴いた**「英会話」**は、（当時の私には）レベルが高すぎたせいか、飽きが来たせいか、部活やら何やら他の用事のせいで時間が潰されたせいか覚えていないが、途中で挫折した。

夏休みの自由研究　中二と中三の夏休みの自由研究で、私は星新一の**ショートショートの和文英訳**に挑戦した。当時は英語と日本語との違い等をよく解ってなかったせいもあって、和英辞典と英文法辞典（？）とにらめっこしながら、逐語訳をしていた。今、当時の「作品」を読んだら、恐らく、その英文の拙さが恥ずかしくて赤面してしまうだろうと思うが、少なくとも、様々な英単語・熟語や英文法に関する知識だけは確かに拡がったと思う。

中学時代は、概して、英語に関しては興味をもって臨めた時期だったと思う。従って、学習するのはそんなに苦ではなかった。しかしながら、英語を「実用的コミュニケーションツール」として捉える事はなく、あくまでも「机上の理論」にとどまってしまったのが、後に（主に英語コミュニケーションで）**多大なる苦労**をする原因となったと言えるかも知

れない。確かに、これらの学習は、学校のテストで高得点を取るのには一役買ったかもしれないが、「実用的コミュニケーションツール」として英語をマスターしたかったら、例えば、NHK ラジオ講座（とりわけ「英会話」）の（当時は）テープも購入して、テープが擦り切れるまで繰り返し聴く、くらいのことはしても良かったのかも知れない。

H.2　高校時代（1984.4 ～ 1987.3）

高校は、片道一時間以上かけて通っていたせいもあって、NHK ラジオ講座を聴講する時間的余裕はなかった。この頃の英語学習は、もっぱら、**大学受験の準備**として行なっていた。この頃やったことも、一応二種類に分けられる。

通信添削講座　私は（通学に時間がかかっていたせいもあって）学習塾や予備校には通わなかった。その代わりに、通信添削講座を利用した。（この方が、やる時間を自分で好きに調節出来るので、時間に縛られるのが嫌いな私には合っていたのかも知れない。）高一の時は「進研ゼミ」、高二&高三の時は「Z 会」を利用した。

学習参考書&問題集　その他に、本屋等で学習参考書や問題集を数冊購入して学習に利用した。「シケ単」「シケ熟」および、英文法や英語構文に関する参考書・問題集を購入し、利用した。

この時期になると、英語は単に受験の為にやっている、という思いもあって、あまり積極的にやる気にはなれず、半ば「義務的に」学習していたので、楽しめなかった。受験では他の教科も勉強しなければならず、時間に追われていて、楽しむ余裕がなかったのも一因かも知れない。当然ながら、英語を「実用的コミュニケーションツール」として習得する様な時間的余裕もなかった。もし、科学者には英語が必要だ、という事をこの時から実感していたら、もう少し真剣に取り組めていたかも知れない。

しかしながら、この当時の学習が、（中学時代の学習と併せて）その後の英語ボキャブラリー の土台、および英語の文法力&読解力 の土台を築いたことは確かであろう。

H.3　大阪大学（阪大）および阪大大学院時代（1987.4 ～ 1996.3）

大学 1 ～ 3 年までは、必須科目で取った英語の授業（ほとんど文学作品の読解）およびそのテスト対策以外は、ほとんど何もやらなかった。

大学 4 年になって、ゼミの一つが、Landau-Lifshitz の”Quantum Mechanics” の輪読

であり、ここで初めて**「科学英語」**に触れることとなる。その後、大学院に入ると、数多くの科学、とりわけ**物理学**、関係の**英語文献（教科書、論文、総説等）**を読むこととなった。

初めのうちは、一文一文を和訳してノートに記しながら読んでいた。博士課程の一年になって、**自らの学術論文**を英語で執筆した時も、まず、日本語で書いてそれを和文英訳していたが、アメリカ帰りの教官に**「日本語を逐語訳すると不自然な英語になる」**と注意された。その後は、自分の論文 を書く際も、初めから英語で書くように努め、文献 を読む際も、和訳せずに英文のまま理解するように努めた。

しかしながら、この時期はまだ、英語を「実用的コミュニケーションツール」として捉えておらず、あくまでも（科学的な書物の）**（机上での）「読み書き」**だけに留まっていた。

H.4　基礎物理学研究所（基研）時代から遺伝研時代まで（1996.4 ～ 2009.9）

無事、阪大大学院博士課程を修了し、研究員として基研に入ると、そこには 数多くの外国人研究者がおり、**英語でのコミュニケーションをせざるを得ない状況**になった。そこで初めて、自分の英語コミュニケーション能力の拙さを思い知った私は、**「コミュニケーションツール」としての英語**の習得に本腰を入れるようになり、様々な教材を活用した。

NHK ラジオ講座「英会話」　まず、中学の頃に挫折した「英会話」を利用した。ただし、毎朝決まった時間に聴くのはつらく、また挫折しかねないと思ったので、テープを購入し、ヒマな時に聴く様にした。

イングリッシュ・アドベンチャー　これは通信講座の一種で、シドニー・シエルダンの書いた小説を有名な俳優さん達が（主に）朗読したテープを聴くものである。

リアル・リンガル　これは、**他の言語では子音だけの発音もしばしばある**のに、日本語の発音ではほぼいつも子音の後に母音が続く、という**「日本語の特殊性」**に着目して、それを克服することにより、英語のリスニングの上達を目指す教材である。これにより、英語（および日本語）の**音声学的特徴**（リエゾン、縮約、同化等を含む）を頭に叩き込み、意識の変革を図るのが狙いであろう。

DHC の英語通信講座（リスニング）　主に英語の初級者（TOEIC スコア 400 ～ 550 点くらい）向けの講座を利用した。これと上記３の講座（教材）が、その後のもっと難易度の高い「訓練」前の「足（耳？）慣らし」となった。

アルクの英語通信講座　かの有名な**「１０００時間ヒアリング・マラソン」**（数回）[*61] は

[*61] 「１０００時間ヒアリング・マラソン」では、一年間で１０００時間の英語のリスニング（聞き取り）を

もちろん、ボキャブラリー増強専用の講座や、(特に「話し・聴き」に特化した)英文法力増強専用の講座も受講した。これにより、私の英語力(特に「話し・聴き」の能力)は階段を登るように向上した。「1000時間ヒアリング・マラソン」に象徴される様に、英語コミュニケーションスキルの上達には、先ずは、**英語のインプットの量を増大させる**ことが欠かせない、ことを身をもって実感した。

DHC の英語通信講座(ライティング)　英語による「テクニカル・ライティング」(マニュアル等の英文作成)の講座も受けた。これにより、(日本語と違う)**英語の特徴** を実用面から 実感し、**「英語らしい英文」**が書ける様になった。

音声学に関する教材　上述の「リアル・リンガル」以外にも、英語の音声学に関する CD 付き本等を数冊購入し、CD を繰り返し聴くことにより、(リエゾン、縮約、同化等を含む)英語の音声学的特徴を、「身体に叩き込んだ」。

テレビの二か国語放送　NHK ニュースや海外ドラマ、また、海外の映画等の二か国語放送は積極的に利用し、**副音声(英語)**にしてしばしば視聴した。中でも、**NHK の(夜)9時のニュース**を英語で視聴するのが習慣化した時期が度々あった。(私自身は、本当はあまり海外ドラマとかにはさほど興味はないのだが、「英語力向上のため」と思ってできるだけ見る様にした。)

「仮想留学」　基研を出て以後は、日本にいても、日本人に囲まれていても、できるだけ学校(研究所)生活や研究業務を(日本語を介さず)英語だけで済ます様にした。(パソコンも英語環境のまま使用し、辞書も英英辞典を使用した。)こうして、**「英語で考える脳」**を形成していった。

主に、**通信講座**が多かったが、それは、毎日決まった時間を割くのが難しい生活状況だったのに加え、時間を縛られるのが嫌いな私には一番合った方法だった。この時期に、とりわけ最初の**「1000時間ヒアリング・マラソン」**を受講した後から、私の**英語コミュニケーション能力** は飛躍的に向上した!!そして、それにより、本当の意味で**「英文を英文のまま理解する」**ことも可能となった。「1000時間ヒアリング・マラソン」では、リスニングの**訓練**(「学習」ではない!)を、**「多聴」**(とにかく多くの英語をインプットして耳を慣らす)と**「精聴」**(正確に聞き取れる様に訓練する(ディクテーション、リピーティング、シャドウイング、区切り聞き通訳、等々を含む))とに区別しているが、私の経験では、英語力を伸ばす為には**「精聴」**が欠かせない。しかしながら、**「多聴」**、あるいはただ**「聞き流す」**だけでも、(毎日)続けていれば、一度向上した英語力の「落

達成する為に、毎月送られてくる教材以外にも、自分自身で英語音声のテープや CD、更には英語のテレビ番組や英語の映画等の「教材」を「調達」 & 活用することが求められる。

ち」の速度をゆっくりにするだけの効果は十分にある。

H.5　University of Houston (UH) 時代（2009.9 ～ 2011.6）

この時代は、周りに日本人の知り合いはいなかったので、英語で生活せざるを得なかった。その中でも、**テレビ番組がすべて英語**なのは、英語の上達に役立ったと思う。特によく視聴したのは、

CNN ニュース、天気のチャンネル、および、科学（自然）、歴史、等々の専門チャンネル

だった。

H.6　総研大葉山時代以降（2011.7 ～ ）

UH から帰ってからは、通信講座を受講することはなかった。しかしながら、いわば、

「一人ヒアリング・ジョギング」あるいは**「一人ヒアリング・ウォーキング」**

とでもいうべく訓練はその後ずっと続けていた。

「１０００時間ヒアリング・マラソン」の趣旨は、毎日３時間英語を聞き続けることである。しかしながら、正直言って、１日３時間確保するのは（仮に「ながら聴き」だとしても）しんどい。そこで、私は１日１～２時間でもいいので、また、「ながら聴き」でもよいので、それをずっと続ける ことにした。例えば、朝食時や夕食時は、絶好の機会であり、**朝食時**には英語の CD をながら聴きし、**夕食時**には **NHK ９時のニュース**を副音声（英語）でながら聴きした。その他、**NHK 教育**でやっている（た）「スーパープレゼンテーション」や「地球ドラマチック」や「ドキュランドへようこそ」や「デザイントーク＋」、その他にも**ドキュメンタリー系番組**等を二か国語放送しているときは積極的に視聴するようにしていた。（このころになると、ドラマはほとんど視聴しなくなった。私にとっては、（とりわけ科学系の）ドキュメンタリーの方のが興味を持てて楽しめたのだ。）

これにより、私の英語力は更なる向上こそしなかったものの、一度身に付けた英語力がサビ着く速度を著しく遅らせることができた、と感じている。

H.7　まとめ & 思うところ

この様に、私は実に多岐にわたる教材& 講座を活用してきたのだが、読者の人々にこれを真似ろと言う気は毛頭ない。読者各々の**「目的」**に応じて、活用すべき教材& 講座を絞

り込めば十分であろう。

もし単に、（論文等を含め）英語の書き物を**読んだり書いたりするだけ**が目的なら、英文法や構文の習得だけでも十分だろう。ただし、もしも、辞書を使わずに早く読み書きしたいのであれば、それに加えてボキャブラリーの増強もした方が良いのかも知れない。いずれにせよ、この場合は、英語の**「学習」**が主であり、「訓練」はさほど必要ないであろう。（しかし、本当に**「英文を英文のまま理解」**したければ、やはり（下に述べる）「聴き・話し」と同様の訓練が必要だ、、、と私は思う。）

逆に、もしも、英語の**「聴き・話し」**が目的ならば、軸足を**「訓練」**に置くことになる。この時は、英文法などは中学で習ったものだけでも十分かも知れないが、**ボキャブラリー**は意識して増強した方が良い。とにかく、**英語発音の特徴**とその速さに慣れることが重要なので、できるだけ多くの英語を聞く必要がある。しかしながら、特に「訓練」をやり始めた時には、「聴きっぱなし」にしてもあまり効果はない。あくまでも、「意味を理解しながら（あるいは発音をきちんと捉えながら）聴く」訓練**（精聴）**の時間をできるだけ確保する様に努力すべきである。また、**音声学**の知識を身につけるのは「聴き・話し」向上に効果があるが、単に（本等を読んで）「頭で理解する」だけではなく、CD（あるいは他の音声メディア）等を活用して「耳で理解する」ようにもしなければあまり意味はない。

でも、一番効果的なのは、ネイティブスピーカーの友人（もしくは知り合い）を持って、常にフィードバックを受けながら、「聴き・話し」（あるいは「読み・書き」）の訓練をすることであろう。本気で英語を上達させたければ、検討して見るのもいいかも知れない。（もちろん、英会話教室に通うのは一つの手である。）

次に効果的なのは、テレビ、映画、ビデオ、動画等々、**視覚的な情報**と併せて英語音声が聴ける「教材」であろう。視覚情報 の助けによって、聴いている内容も理解しやすくなる。

現在では、**インターネット**を介して、（海外の YouTube 動画等も含め）様々な教材がタダ同然で入手可能なので、それらをうまく利用するのは一つの手である。（ただし、詐欺に引っかからない様に注意してほしい。）

いずれにせよ、本当に大事なのは、「どんな教材（あるいは講座）を利用するか？」よりも、**「どれだけ本気になって、持続して、打ち込めるか？」**だと思う。どんな教材や講座にもそれぞれ一長一短があるだろうが、それが「詐欺」でない限りは、きちっと 利用しさえすれば、一定の効果はあるハズである。だから、どんな教材や講座でも、始めたからには、**ある程度（少なくとも数ヶ月から一年くらい）は続けてみる**ことが肝要である。それでも効果が出なかった時初めて、もっと自分と相性の良い教材（講座）を選ぶことを考えれば良いだろう。

以前にどこかで申したが、私は英語、とりわけコミュニケーション英語、のスキルを身につけるのは「習うよりも慣れろ」だと思っている。どんだけ高度な概念を頭で理解していても、それがとっさに出てこないのでは日常コミュニケーションでは使えないので、「難しい事（概念等）を極める」よりも「簡単な事（英文）を繰り返し練習する」気持ちが大切である、、、と私は思う。

以上、かなりおこがましいことを申したかも知れないが、この手記を読まれた方々が一念発起されて、英語コミュニケーションを上達され、ご自身の「目標」を達せられたら幸甚である。